

P1) a) Necesitamos que $f(x, y)$ sea continua y que Ω sea cerrado y acotado (compacto).

Es claro que $f(x, y) = |x|y$ es continua por álgebra de funciones continuas.

Para mostrar que Ω es compacto:

$$\Omega \text{ cerrado} \Rightarrow \text{Adh}(\Omega) = \Omega$$

Si tomamos $(x_0, y_0) \in \text{Adh}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow \exists (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ con } (x_n, y_n) \in \Omega \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \text{ con } -1 \leq x_n \leq 1 \quad -1 \leq y_n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x_0 \leq 1 \quad -1 \leq y_0 \leq 1$$

$$\text{Por lo tanto } (x_0, y_0) \in \Omega \Rightarrow \text{Adh}(\Omega) = \Omega$$

Por otro lado Ω es acotado ya que sus componentes lo son. (Ω corresponde a un cuadrado centrado en el origen, por lo tanto es acotado).

Por Teorema Weierstrass se tiene que $f(x, y)$ alcanza su mínimo y su máximo en Ω .

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} -xy, & x < 0 \\ xy, & x > 0 \end{cases}$$

entonces $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas $\Rightarrow f$ diferenciable

En $(0,0)$ se tiene:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{|h| * 0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \frac{|0| * h - 0}{h} = 0$$

$$f(f(h_1, h_2) - f(0,0) - (0,0)(h_1, h_2) = o(h_1, h_2)$$

$$o(h_1, h_2) = |h_1|h_2$$

$$0 \leq \frac{|o(h_1, h_2)|}{\|h\|} = \frac{|h_1||h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(|h_1|^2|h_2|^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{\text{cuando } h_1 \text{ y } h_2 \text{ tienden a } 0} 0$$

Por lo tanto se tiene que $f(x, y)$ es diferenciable en $(0,0)$

$$c) \quad h(t) = t^2$$

$$g(x, y) = h(f(x, y)) = |x|^2 y^2 = x^2 y^2 \quad (x, y) \in \Omega$$

g está compuesta por dos funciones diferenciables, luego por algebra de funciones diferenciables, g es diferenciable en Ω .

Y sus derivadas parciales son

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 x \\ 2x^2 y \end{pmatrix}$$