Pauta P2 Control 1

a) Para demostrar que h es diferenciable:

Forma 1 :

Notamos que f, g son diferenciables (por enunciado), cosh(g(x)) también diferenciable por composición, luego f(y)cosh(g(x)) es diferenciable por producto de funciones diferenciables.

Forma 2:

Calculamos las derivadas parciales de h:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f(y)senh\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = f'(y)\cosh(g(x))$$

Luego, como f y g son continuamente diferenciables (C^1), las derivadas parciales son continuas, por lo tanto h es diferenciable.

1 punto

Plano tangente al grafo de h en el punto (0,0) :

La ecuación del plano está dada por:

$$z - h(0,0) = \nabla h \cdot (x, y)$$
$$h(0,0) = f(0)\cosh\big(g(0)\big) = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0 \ , \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 1$$
$$\Rightarrow z = y$$

2 puntos

b) $f^{'}(x,y) = \begin{bmatrix} e^x cosy & -e^x seny \\ e^x seny & e^x cosy \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |f^{'}(x,y)| = e^{2x} \neq 0$ (determinante)

$\therefore f^{'}(x,y)\ es\ una\ matriz\ invertible$

1,5 puntos

Luego, vemos si se cumplen las hipótesis del teorema de la Función Inversa:

- El conjunto $\mathbb{R} \times (0,2\pi)$ es abierto
- $f \in C^1$
- $f^{'}\ es\ invertible$

Lo cual sabemos que se cumple por lo ya calculado, por lo tanto por Teorema Función Inversa podemos afirmar que $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0,2\pi)$ existe y es C^1, en particular diferenciable.

0,5 puntos

Para calcular $(f^{-1})'$ en (1,0), vemos que:

$(f^{-1})'(1,0) = (f^{'}(f^{-1}(1,0)))^{-1}$

Y $f^{-1}(1,0) = (0,0)$, pues si $e^x cosy = 1\ y\ e^x seny = 0$, entonces (x,y) debe ser igual a (0,0).

Así, $f^{'}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, matriz identidad.

Por lo tanto, $(f^{-1})'(1,0) = \left(f^{'}(0,0)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1 punto.