

Clase auxiliar #4 Cálculo en varias variables

Prof. Michal Kowalczyk, Prof. Aux. Alberto V. Azócar, albvera@ing.uchile.cl

20 abril 2010

Problema 1 [Análisis de diferenciabilidad].- Sea $\alpha > 0$ y considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida según

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^\alpha}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Encuentre los valores de α para los cuales es posible asegurar que f es diferenciable.

Problema 2 [Derivadas direccionales].- Considere la función definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Pruebe por definición que las derivadas direccionales en sentido de los vectores canónicos $\exists \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ pero no son continuas.

Problema 3 .- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

- i) Calcule $\nabla f(0, 0)$.
- ii) Pruebe por definición que f es diferenciable en $\vec{0}$.
- iii) ¿Son sus derivadas parciales continuas?

Problema 4 [Derivadas parciales acotadas].- Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas tales que cumplen $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right| \leq K \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Pruebe que $|f(x) - f(y)| \leq N \|x - y\| K + \|x - y\|$.