

Clase auxiliar #2 Cálculo en varias variables

Prof. Michal Kowalczyk, Prof. Aux. Alberto V. Azócar, albvera@ing.uchile.cl

6 abril 2010

Problema 1 [Conjuntos clopen].- Verifique que, para el espacio vectorial normado en estudio, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el espacio entero.

Problema 2 [Dominios irregulares].- Considere la función definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

- Encuentre $\text{dom}(f)$, bosqueje.
- Determine curvas de nivel de f .
- ¿Es f continua en 0?

Problema 3 [Continuidad].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudie $\text{dom}(f)$ y su continuidad.

Indicación: Puede usar que $\exists m, M > 0$ tales que $m\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq M\|\vec{x}\|_\infty$.

Problema 4.- Estudie el límite en el origen de:

$$g(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{(x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Problema 5.- Considere la siguiente función y estudie su continuidad:

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 \cos(x_2) - x_2 \cos(x_1) - x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Problema 6 [Funciones lineales].- Sea $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal. Demuestre las siguientes propiedades:

- h es continua $\forall x \in \mathbb{R}^N$
- $h(\vec{x})$ es acotada si $\vec{x} \in \bar{B}(0, 1)$

Indicación: Comience por demostrar que una función continua $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo en un conjunto compacto.