MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Alejandro Jofré. **Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Examen

Viernes 3 de Julio de 2009

OBS: Las Preguntas 1 y 2 son obligatorias. Responder sólo UNA de las otras dos.

P1.

a) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función contractante en una vecindad cerrada del origen de radio δ, con constante L conocida. Pruebe que si $\|f(0,0)\| < \delta(1-L)$ entonces existe un único punto fijo de f en dicha vecindad.

b) Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y la ecuación de tres variables (1):

$$F(xy, z-2x) = 0$$

i) (2 ptos.) Suponga que existe $z = z(x,y)$ que satisface $z(x_0, y_0) = z_0$, donde (x_0, y_0, z_0) satisface la ecuación (1), y que para todo (x,y) en una vecindad de (x_0, y_0), los puntos $(x, y, z(x,y))$ satisfacen la ecuación (1). Encuentre qué condiciones debe satisfacer F para que se cumpla lo anterior.

ii) (2 ptos.) Demuestre que dada la condición anterior, la función $z(x,y)$ satisface la igualdad:

$$x_0 \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) - y_0 \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0$$

P2.

a) Calcule el volumen del elipsoide dado por $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$
Hint: Use coordenadas esféricas junto con otro cambio de variables que le parezca conveniente.

b) Calcule el volumen encerrado por el cono parabólico $x^2 + y^2 = z^2$ y por la bola $B((0,0,0), r), r > 0$.

P3.

a) (3 ptos.) Determine el polinomio de Taylor de orden 2 en torno a $(\frac{\pi}{2}, 1)$ de la función definida por $f(x,y) = sen(xy) + cos(xy) + 2(x+y)$.

b) (3 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$

i) Encuentre los puntos críticos de f.

ii) Determine si son máximos, mínimos locales o puntos silla. Justifique por qué f tiene máximo global.

P4.

a) (3 ptos.) Encuentre el mínimo de $e^{x^2+y^2+z^2}$ sobre el conjunto de los (x,y,z) tales que $2z - y = 3x$.

b) (3 ptos.) Se desea resolver la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, c = cte \neq 0$$

Para ello, se propone hacer el cambio de variables $\xi = x + ct, \eta = x - ct$, de modo que $\phi(x,t) = \psi(\xi(x,t), \eta(x,t))$ donde ahora $\psi(\xi, \eta)$ es la incógnita.

i) Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi}(\xi(x,y), \eta(x,y))$$

ii) Use la propiedad anterior para probar que toda solución ϕ de clase $\mathcal{C}^2$ de la ecuación de ondas se escribe como $\phi(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$ con f,g funciones de una variable.

Tiempo: 3 Horas