

Control 1

5 de Mayo de 2010

- P1. a) Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dira Lipschitz si $\exists L > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y supongamos que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que f es Lipschitz en \mathbb{R}^2 si y sólo si f_1, f_2 también lo son.

- b) Sea $\epsilon > 0$. Consideremos:

$$C_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \epsilon\}$$

- i) Muestre que para todo $\epsilon > 0$, C_ϵ es cerrado y acotado.

- ii) ¿ Es el conjunto $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}$ cerrado y acotado?

- P2. a) Sea $f(x, y) = e^{2y} \arctan(\frac{y}{3x})$

- i) Determine a partir del punto $(1, 3)$ las direcciones de máximo crecimiento y decrecimiento.
 ii) Determine a partir del punto $(1, 3)$ el conjunto de direcciones para el cual el valor de f no cambia.

- b) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- i) Determinar el valor de α para que la función sea continua en el origen.

HINT: Puede serle útil el cambio de variables: $x = t, y = th(t)$ donde $\lim_{t \rightarrow 0} th(t) = 0$

- ii) Para ese valor de α , calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

- P3. a) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables y $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x, y, z) = (f(g(z, y), g(y, x)), g(z^2, xy) + f(x, x)g(z^2, y))$$

Calcule $DF(x, y, z)$

- b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g$ diferenciable, f definida por:

$$f(x, y) = (ax + by, cx - by)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}, a + c \neq 0$ y $b \neq 0$.

Si sabe además que $g(0) = (0, 0)$ y que

$$D(f \circ g)(x) = (\text{sen}(x), \text{cos}(2x))^t$$

Encuentre g