MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Alejandro Jofré. **Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Control 3

Miércoles 24 de Junio de 2009

P1.

a) (2,0 ptos) Sea $R = [0,1] \times [0,1]$ y $f : R \to \mathbb{R}$ definida por $f = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq y \\ 2 & si \quad x > y \end{cases}$

Demuestre que f es integrable y, usando sumas de Riemann, que $\displaystyle\int_R f = 1$.

b) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, \sqrt{3} \leq xy, x \geq 0, y \geq 0\}$ y $T^{-1}(x,y) = (xy, x^2 + y^2) = (u,v)$

i) (1,0 ptos) Obtenga $T(u,v)$. Para ello, primero determine $x+y$ y $x-y$ en función de u y v.

ii) (1,0 ptos) Dibuje D en el plano x-y y Ω en el plano u-v, donde Ω es tal que $T(\Omega) = D$.

iii) (2,0 ptos) Calcule $\displaystyle\int_D xy(x^2 + y^2)dxdy$

P2.

a) (2,0 ptos) Calcule usando Fubini $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \int_{\sqrt{y}}^{\pi} \frac{sen(x^2)}{x^2} y^{\frac{3}{2}} dxdy$

b) Sea una seta cuyo tallo es un cilindro recto de diámetro 1 y largo 2 cuya base está en el plano x-y y centrada en $(0,0,0)$, y su cabeza es un hemisferio de radio 2 de base coincidente con la parte superior del tallo. Si la densidad de masa está dada por la función $\rho(x,y,z) = 1$ en el tallo, y $\rho(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ en la cabeza:

i) (0,5 ptos) Parametrice el tallo y la cabeza de la seta.

ii) (1,5 ptos) Calcule la masa total de la seta.

iii) (2,0 ptos) Encuentre las coordenadas del centro de masa de la seta.

Tiempo: 2:30 Horas