Cálculo en Varias Variables, Control No 2

7 de Mayo de 2003 | Prof. Patricio Felmer

P1. La función
$$u(x,y,z) = 3e^{-(3x^2+2y^2+z^2)}$$
representa la concentración del gas G en el espacio. El insecto volador I tiene aversión al letal gas G y está detenido en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$. ¿En qué dirección debe moverse I con el objeto de disminuir al máximo las chances de ser aniquilado por el gas?

P2. Considere la (hiper)superficie S en R^4 definida por
$$(t+z^2)\cos(x^2+y^2) = 2.$$
Encuentre el (hiper) plano tangente a S en el punto $(x,y,z,t) = (0,0,1,1)$.

P3. Sean $f : R^2 \to R$ y $g, h : R \to R$ funciones diferenciables. Suponga además que g y h son funciones positivas. Definimos
$$F(x,y) = f(g(x)^{h(y)}, h(y)^{g(x)}).$$
Calcule
$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}.$$

P4. Estudie la diferenciabilidad de F en todo ^{2}, donde F está definida de la siguiente manera:
$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 y \log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
¿Es F continua?

P5. Sea $f : R^2 \to R$ de clase C^2 que satisface la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
Sean $u, v : R^2 \to R$ también de clase C^2 tales que
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial t}.$$
Demuestre que la función $g(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$ también satisface la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0.$$

P6. Encuentre la aproximación de primer orden $P_1(x,y,z)$ y la aproximación de segundo orden $P_2(x,y,z)$ para la función
$$f(x,y,z) = xe^y + ze^{2y},$$
en torno al punto $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$. Si se escribe $f = P_2 + E$, llamamos E el error de la aproximación de segundo orden. Encuentre una región en torno al origen que garantice un error E menor o igual a 10^{-3}.