MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Alejandro Jofré. **Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Control 2

Miércoles 27 de Mayo de 2009

P1. Se sabe que la presión ejercida por un gas sobre una partícula de posición (x,y,z) está dada por la función $P(x,y,z)=\rho_0(sen^2(2x)+cos^2(3y))e^{-z}$, donde ρ_0 es una constante positiva. Si nos situamos en el punto $(\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{12},ln(\rho_0))$, se pide:

i) (1,5 ptos.) Determinar cuál es la razón de cambio de la presión al desplazarnos hacia el punto de coordenadas $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{12},ln(\rho_0))$.

ii) (1,5 ptos.) En qué dirección debemos movernos para que la presión disminuya lo más rápidamente posible. ¿Y para que aumente?

iii) (1,5 ptos.) Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de presión ¿qué dirección debemos tomar?.

iv) (1,5 ptos.) Si nos movemos siguiendo el camino descrito por:
$r(t)=(x(t),y(t),z(t))=(\frac{t}{2},-t+\frac{4\pi}{3},0)$, determinar $\frac{d(P\circ r)(t)}{dt}$, para $t=\pi$.

P2. a) (2 ptos.) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}^2$, se define el Laplaciano de f como $\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
Si hacemos el cambio de variables (coordenadas polares) $x=rcos(\theta)$, $y=rsen(\theta)$ y definimos $g(r,\theta)=f(rcos(\theta),rsen(\theta))$. Demuestre que la fórmula del Laplaciano en coordenadas polares es $\triangle g=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$

b) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $F(x,y)=cos(xy)-x^4y^4$.

i) (1 pto.) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno el punto $(0,0)$.

ii) (3 ptos.) Encontrar una vecindad en torno a $(0,0)$ tal que el error sea menor que 10^{-14}.
HINT: La fórmula del resto para un polinomio de Taylor de orden 2 centrado en un punto $x_0\in\mathbb{R}^2$ de una función de clase $\mathcal{C}^3$ esta dada por:
$R_2(x_0,h)=\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0+t_{ijk}h)h_ih_jh_k$, con $t_{ijk}\in[0,1]$

P3. a) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=x^4+y^4-8(x^2+y^2)+8$

i) (1 pto.) Encontrar los puntos críticos de f.

ii) (1,5 ptos.) Clasificar los puntos encontrados utilizando la condición de segundo orden.

b) Doña Paipa es una vendedora de sopaipillas caseras y desea maximizar sus ventas diarias. Su socio, don Louis Monkey, le recomienda a usted como estudiante de C.V.V. para revolver su problema económico. Para ello, deberá basarse en la siguiente información:

1) Doña Paipa usa 3 tipos de ingredientes "mágicos", Gambina (G), Ratina (R) y Wentina (W), que tienen costos Cg,Cr y Cw, respectivamente.

2) Doña Paipa desea invertir 20000 pesos diarios en esos insumos.

3) Un estudio de mercado revela que la demanda de sopaipillas en función de los ingredientes viene dada por: $f(G, R, W) = G^p R^q W^r$, con p, q, r constantes positivas, y G, R, W es la cantidad de cada insumo utilizado en la preparación.

i) (1,5 ptos.) Escriba el problema de Doña Paipa como un problema de Optimización

ii) (2 ptos) Resuelva el problema usando multiplicadores de Lagrange para $p = q = r = 1/2$, indicándole a Doña Paipa cuanto debe comprar de cada insumo, y cuanto podrá vender.

BONUS (0,5 puntos):
Usando lo visto en clase auxiliar, resuelva el siguiente problema de optimización:
$min\ (x, y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con la restricción $\|(x, y)\| = 1$
Este problema se entrega con la P3. Entregue SÓLO si está seguro, ya que se descontarán 0,5 puntos si está malo.

Tiempo: 3 Horas