**Examen MA 22A**

6 de julio de 2004

Profesor: A. Jofre

**1. a)** (2 ptos.) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xzt + xy - y^2 t + 2 &= 0 \\ \cos(xt) + zy - 2 &= 0. \end{aligned}$$

i) Muestre que existe $\varphi$ definida en una vecindad de $(0,1)$ de clase $C^1$ tal que las soluciones del sistema en torno del punto $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (0,1,1,2)$ tienen la forma $(z,t) = \varphi(x,y)$.

ii) ¿Es $\varphi$ invertible en torno de $(0,1)$?

**b)** (4 ptos.) Sea $u(r,s)$ una función de clase $C^2$ que satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,s) + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(r,s) = \frac{1}{r^2+s^2}.$$

Considere el cambio de variables

$$r = e^x \cos(y), \qquad s = e^x \sin(y),$$

y defina $v(x,y) = u(e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Calcule la siguiente expresión $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

**2. a)** (2 ptos.) Responda verdadero o falso

i) La continuidad de una función en un punto implica la continuidad de dicha función en una vecindad.

ii) $\{A \in \mathcal{M}_{nn} : \det(A) > 0\}$ es un conjunto abierto.

iii) $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 1\}$ es un conjunto cerrado.

iv) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $C^1$ convexa y $x_0$ es un punto crítico de $f$, entonces $x_0$ es máximo de $f$.

v) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $C^2$ y $x_0$ es máximo local de $f$ entonces $Hf(x_0)$ es definida negativa.

vi) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $C^2$ y $x_0$ es mínimo local de $f$ entonces $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva.

**b)** (2 ptos.) Sea $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2$ tal que

$$Y(t) = at + \int_0^t Y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $a$ es una constante. Calcule $Y''(t)$ y deduzca una fórmula explícita para $Y(t)$.

**c)** (2 ptos.) Sea $D$ la región en el primer cuadrante, encerrada por las circunferencias $x^2+y^2-2x=0$ y $x^2+y^2=4$. Calcule

$$\iint_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

**3. a)** (3 ptos.) Considere el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ determinado por $x^2+y^2 \le 9$, $z \ge 0$, $z \le 2+(y-3)^2$, $z \le 2+(y+3)^2$. Encuentre el volumen de $\Omega$.

**b)** (3 ptos.) Sean $p, q > 0$. Encontrar el mínimo de la función $\frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$ sujeto a $x > 0, y > 0, xy = 1$. Luego usar este resultado para deducir la siguiente desigualdad cuando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $x > 0, y > 0$,

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$$

**TIEMPO: 3.5 HORAS**