MATEMATICAS II
Integral de Riemann.

Integrales Triples (Cambio de variable)

1) Calcular las siguientes integrales triples en los recintos indicados:

i) $\displaystyle\iiint_D x + zy + x^2yzdxdydz$, $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 2\right\}$. **Solución:** $-\dfrac{1}{3}$

ii) $\displaystyle\iiint_D zxy\sqrt{1 + y^2}dxdydz$, $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$.**Solución:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4}$

iii) $\displaystyle\iiint_D \frac{z^2y - zx^2 - zx^4}{1 + x^2}dxdydz$, con D el cubo unidad $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. **Solución:** $\frac{\pi-4}{24}$.

iv) $\iiint_D dxdydz$, siendo D el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$. (El valor de la integral es el volumen del tetraedro). **Solución:** $\dfrac{1}{6}$

v) $\displaystyle\iiint_D e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dxdydz$, D la esfera unidad centrada en el origen. Indicación: Cambiar a variables esféricas. **Solución:** $\frac{4}{3}\pi(e - 1)$.

vi) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$, siendo D el recinto limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$ con $0 < b < a$. **Solución:** $4\pi \ln \dfrac{a}{b}$

vii) $\iiint_D yzdxdydz$, siendo D la región limitada por el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los semiespacios $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$. **Solución:** $\frac{ab^2c^2}{15}$.

2) Expresar en la forma $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ldots\right\}$ y hacer un esbozo de los recintos sobre los cuales se están calculando las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \sin y^2 dzdydx, \quad \text{(b)} \int_0^1\int_0^y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dzdxdy, \quad \text{(c)} \int_0^4\int_0^{\frac{4-x}{2}}\int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dzdydx.$$

Finalmente plantear alguna otra de las integrales iteradas y hallar el valor de dicha integral. (Nota: en este ejercicio el orden de integración dado por dx, dy y dz juega un papel fundamental). **Solución:** (a) 1; (b) $\dfrac{1}{3}$; (c) 4.

3) Calcular el volumen limitado por el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$. Indicación: utilizar el cambio de variable a cilíndricas. **Solución:** 9π.

4) Hallar el volumen limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$. **Solución:** Vol$= \pi$.

5) Hallar el volumen del cuerpo definido como $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\right\}$. **Solución:** 3π.

6) Hallar el volumen comprendido entre $x^2+y^2+z^2 = 100$ y $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$. **Solución:** $\dfrac{1000\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

7) Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2+y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular $\int_W xdxdydz$. **Solución:** $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.

8) Calcular el volumen interior limitado por las superficies $z = 0$ y $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$. **Solución:** $\dfrac{8a^3}{3}\left(\pi - \dfrac{4}{3}\right)$.

9) Calcular el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c. **Solución:** $\dfrac{4}{3}\pi abc$.

10) Hallar la masa de la lámina limitada por las circunferencias $x^2+y^2=2x$ y $x^2+y^2=4x$ y función de densidad $\rho(x,y)=x$. **Solución:** 7π.

11) Hallar el centro de masa de una lámina $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 1, 0\le x, 0\le y\}$ de un material no homogéneo tal que la densidad en cada punto (x,y) viene dada por $\rho(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. **Solución:** $(\frac{3}{8},\frac{3}{8})$.

12) Calcular el centro de gravedad de un cilindro circular recto de radio de la base R, de altura h y cuya densidad varía proporcionalmente a su distancia a la base. **Solución:** $\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$.

13) Calcular el momento de inercia con respecto al eje OY del área plana comprendida entre la parábola $y=a^2-x^2$ y el eje OY. **Solución:** $\frac{4a^5}{15}$.

14) Calcular el momento de inercia con respecto al eje OZ del volumen del paraboloide de revolución $z=x^2+y^2$, limitado por el plano $z=a$. **Solución:** $\frac{\pi a^3}{6}$.

15) Calcular el momento de inercia del sólido interior al cono $z^2=x^2+y^2$ para $-4\le z\le 4$ respecto de los ejes coordenados y respecto al origen (densidad μ =constante). **Solución:** $I_x=I_y=512\pi\mu$, $I_z=\frac{1024}{5}\pi\mu$, $I_0=\frac{3072}{5}\pi\mu$.

16) Se pretende instalar un equipo de aire acondicionado en un estadio de deporte de planta elíptica de semiejes a y b con $0<a<b$ y paredes planas perpendiculares al suelo (es decir, el recinto limitado por el cilindro de ecuación$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z\ge 0$). Además, la cubierta es una porción del elipsoide $c^2z^2+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ siendo $c\ge 1$. Se utilizarán compresores y evaporizadores de aire según ciertas caraterísticas técnicas. Para determinar el número de dichos aparatos, se precisa conocer el volumen de aire que habría que enfriar. Calcular, por tanto, el volumen del estadio. (Nota: si las variables a, b y c, aparentemente, pudiesen complicar los cálculos, tomar $a=2$, $b=1$, y $c=2$).

17) Calcular la masa y el centro de gravedad del sólido limitado por el hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2+4=0$ y el cilindro $x^2+y^2-9=0$, y cuya densidad en cada punto es $m(x,y,z)=\dfrac{5-z}{2}$.

18) Calcular la masa M de la superficie S definida por $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ siendo la densidad en cada punto el cuadrado de la distancia de su proyección sobre el plano OXY al origen de coordenadas.

19) Dado el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ cuya densidad en cada punto es $m(x,y,z)=abc-|xyz|$, calcular su masa.

20) Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola $y=a-\dfrac{a}{b^2}x^2$ y el eje OX.

21) Calcular la masa del sólido limitado por el hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2+1=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-9=0$ en el semiespacio $z\ge 0$, y cuya densidad en cada punto es $m(x,y,z)=z^2$.

22) Calcular la masa del cuerpo limitado por el hiperboloide de dos hojas $x^2+4y^2-z^2+4=0$ y el cilindro $x^2+4y^2-9=0$, y cuya densidad en cada punto es $m(x,y,z)=1-\dfrac{z}{4}$.

23) Calcular el centro de gravedad del sólido $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | \quad y^2\le x\le 2y^2, \quad z^2\le y\le 2z^2, \quad x^2\le z\le 2x^2\}$, cuya densidad en cada punto es $m(x,y,z)=xyz$. Se aconseja tomar como nuevas variables

$$u=\frac{x}{y^2}, v=\frac{y}{z^2}, w=\frac{z}{x^2}.$$

24) Hallar el volumen del sólido acotado superiormente por el paraboloide $z=5-x^2-y^2$, e inferiormente por el paraboloide $z=4x^2+4y^2$. Hallar también su masa siendo la densidad en cada punto $m(x,y,z)=8-z$.

25) Se considera el sólido interior al cilindro $x^2+y^2=1$, limitado superiormente por la superficie $z^2=2+x^2+y^2$, e inferiormente por $z=x^2+y^2$. Hallar su masa sabiendo que la densidad en cada punto es $m(x,y,z)=6-(x^2+y^2)z$.

26) Hallar la masa del sólido $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2\le 1, \ x^2+y^2\le x, \ z\ge 0\}$ que tiene como función de densidad en cada punto $m(x,y,z)=z$.

27) Hallar el volumen limitado entre las superficies

$$\begin{cases} z^2 - 4 = x^2 + 2y^2 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

28) Hallar el volumen limitado entre las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3z = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

29) Hallar el volumen limitado entre las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 8y \end{cases} \quad \text{para } x \geq 0.$$

30) Calcula la masa del sólido Ω definido por $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, z^2 - x^2 - y^2 \geq 2\right\}$ que tiene como función de densidad en cada punto $m(x, y, z) = |z|x^2 + |z|y^2$.

31) Calcula el volumen interior a la superficie $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 36 = 0$ y exterior a la superficie $4x^2 + 9y^2 - 9 = 0$.

32) Calcular el volumen limitado por el cono de revolución $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$, el paraboloide de revolución $x^2 + y^2 + 3z = 4$ y el plano $z = 0$. **Solución:** $\frac{13\pi}{6}$.