MATEMATICAS II
Integral de Riemann.

Integrales Dobles (Cambio de variable)

1) Se pide evaluar las integrales $\iint_D f(x,y)dxdy$ según los valores de f y el dominio D. Se sugiere pensar en algún cambio de variable (sólo en algunos casos se indicara un cambio de variable adecuado):

i) $f(x,y) = (x+y)^2$, D es el paralelogramo limitado por las rectas $y=-x$, $y=-x+1$, $y=2x$ e $y=2x-3$. (Tomar $u=x+y, v=2x-y$). Solución: $\frac{1}{3}$.

ii) $f(x,y)=xy$, D es el paralelogramo limitado por las rectas $y=x$, $y=-x+1$, $y=2x$ e $y=2x-2$. Solución: 7.

iii) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $D=[0,1]\times[0,1]$. (Tomar coordenadas polares). Solución: $\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right]$.

iv) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, D es el cuarto de corona circular situado en el primer cuadrante y limitado por las circunferencias $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=b^2$ siendo $0<a<b$. Solución: $\frac{\pi}{2}\left[b^2\log b - a^2\log a - \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\right]$.

v) $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Solución: $\frac{\pi}{12}$.

vi) $f(x,y)=e^{\frac{x-y}{x+y}}$, D el triángulo limitado por las rectas $x=0$, $y=0$ y $x+y=1$. (Tomar $x+y=u, x-y=v$). Solución: $\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)$.

2) Hallar el área limitada por las circunferencias $x^2+y^2=2x$ y $x^2+y^2=4x$ y las rectas $y=x$ e $y=0$. Solución: $\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$.

3) Se pide hallar el centro de masa de una lámina $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, 0\le x, 0\le y\right\}$ de un material no homogéneo, tal que la densidad en cada punto (x,y) viene dada por $\rho(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Indicación: El centro de masa de una superficie D, con de densidad ρ es el punto (x_G,y_G) siendo $x_G=\frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$ y $y_G=\frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$. Se recomienda un cambio a polares, no descartando algún otro cambio de variable al tratar la integral real correspondiente. Solución: $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

4) Calcular la integral $\iint_D x\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, 0\le x, 0\le y\right\}$. Solución: $\frac{\pi}{16}$.

5) Calcular $\iint_D e^{x/y}dxdy$ siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^3\le x\le y^2\right\}$. Solución: $\frac{3-e}{2}$.

6) Expresar mediante las integral integrales iteradas, la siguiente integral $\iint_D f(x,y)dxdy$ siendo D el conjunto definido por las inecuaciones $0\le y\le 1, \sqrt{y}\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$. Calcular $\iint_D ydxdy$. Solución: $\frac{13}{30}$.

7) Calcúlese $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy$ donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x, 0\le y, x+y\le 2\right\}$. Tómese para ello el cambio de variable $y-x=u$, $y+x=v$. Solución: $e+\frac{1}{e}$

8) Hallar la integral $\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$ donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, a\le xy\le b, y^2-x^2\le 1, x\le y\right\}$ con $0<a<b$. Se recomienda utilizar el cambio de variable $u=x^2-y^2$, $v=xy$. Solución: $\frac{1}{2}\log\frac{1+b}{1+a}$.

9) Calcular el volumen comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y el cono de ecuación $x^2+y^2-z^2=0$.

10) Calcular el volumen comprendido entre el cilindro elíptico $x^2+4y^2=1$ y el paraboloide $x^2+y^2=z$.

11) Hallar $\iint_D xydxdy$ siendo D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=4$ y $x^2-y^2=1$. Utilizar el cambio de variable $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$. Solución: $\frac{15}{8}$.

12) Hallar el área limitada por las circunferencia $x^2+y^2=2x$ y $x^2+y^2=4x$ y las rectas $y=x$ e $y=0$. Solución: $\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$.

13) Sea $D\subset\mathbb{R}^2$ el cuadrilátero curvilíneo limitado por las cuatro parábolas $y^2=a^3x$, $y^2=b^3x$, $x^2=c^3y$, $x^2=d^3y$ $(0<a<b,\ 0<c<d)$

Calcular el volumen del cuerpo de revolución generado al girar D alrededor del eje OY. Para ello convine saber que dicho volumen es $Vol=2\pi\iint_D xdxdy$. Se sugiere el cambio de variable $x=uv^2$ e $y=u^2v$. Solución: $\frac{3\pi}{10}(a^4-b^4)(c^5-d^5)$. (Sugerencia: si el cálculo con las variables a,b,c y d resulta "molesto", pude hacerse un primer cálculo con $a=2$, $b=3$, $c=1$ y $d=\frac{3}{2}$.