**Guía**
**Semana 11**

# 1. RESUMEN

**Conjuntos Jordan-medibles.** Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ acotado tiene *medida nula* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de rectángulos $\{R_i\}_{i \in I}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} R_i, \quad \sum_{i \in I} V(R_i) < \varepsilon$$

Decimos que un conjunto $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^N$ es *medible en el sentido de Jordan* o simplemente *Jordan-medible* si su frontera $Fr(\mathcal{D})$ es de medida nula.

• Sea $f$ una función continua sobre un conjunto $\mathcal{D}$ cerrado, acotado y Jordan-medible en $\mathbb{R}^N$. Entonces $f$ es integrable sobre $\mathcal{D}$. En particular, el volumen de un conjunto cerrado, acotado y Jordan-medible en $\mathbb{R}^N$ está bien definido y vale $V(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} 1$.

**Teorema de Fubini.** Sean $R_1 \subset \mathbb{R}^N$, $R_2 \subset \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2 \subset \mathbb{R}^{N+m}$ y $f : R \to \mathbb{R}$, una función integrable, y tal que las funciones

$$x \in R_1 \mapsto \int_{R_2} f(x,y)dy, \quad y \in R_2 \mapsto \int_{R_1} f(x,y)dx,$$

están bien definidas y son integrables.

• Entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \left( \int_{R_2} f(x,y)dy \right) dx = \int_{R_2} \left( \int_{R_1} f(x,y)dx \right) dy.$$

Si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ y $f : R \to \mathbb{R}$ y si todas las integrales que siguen están bien definidas se tiene que

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \cdots \left( \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N) dx_N \right) dx_{N-1} ) \cdots \right) dx_1.$$

El orden en las integraciones sucesivas puede alterarse como se desee. Cuando se quiera enfatizar el orden de integración es conveniente escribir

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N) dx_N.$$

**Derivación bajo el signo integral o Regla de Leibnitz**

• Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\, dt$$

es diferenciable y su derivada es:

$$\frac{dF}{dx} \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\, dt \right] = f(x, \beta(x))\, \beta'(x) - f(x, \alpha(x))\, \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt$$

## 2. EJERCICIOS PROPUESTOS

**Conjuntos Jordan medibles**

**P1.-** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función no negativa en $C \subset D_f$. Se define:

$$C_0(f, C) = \{(x, x_{n+1} :\ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Si $C$ es medible Jordan y $f$ es continua en $C$, demuestre que $C_0(f, C)$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^{n+1}$ y que $v(C_0(f, C)) = \int\limits_C f$. Interprete geométricamente los casos $n = 1$ y $n = 2$.

**Teorema de Fubini**

**P2.-** Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Muestre que la integral iterada $\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 f(x, y)dy\right] dx$ existe, pero $f$ no es integrable.

**P3.-** Calcular:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 y e^{x^3}\, dx\, dy$$

**P4.-** Considere: $I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y (x^2 + y^2)dxdy + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-y} (x^2 + y^2)dxdy$

a) Calcule $I$ directamente.
b) Dibuje la región de integración.
c) Calcule $I$ invirtiendo el orden de integración.

**P5.-** a) Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que:

$$\int\limits_0^1 \left( \int\limits_x^1 g(t)dt \right) dx = \int\limits_0^1 t g(t)dt$$

b) Calcular:

$$\int\limits_0^1 \left( \int\limits_y^1 e^{-y/x} dx \right) dy$$

**P6.-** Una placa de metal triangular homogéneo de masa $M$ tiene vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$. Encuentre su momento de inercia, definido por:

$$I_x = \int\int_\Omega \rho(x,y)\, y^2\, dx\, dy, \quad I_y = \int\int_\Omega \rho(x,y)\, x^2 dx\, dy$$

donde $\Omega$ es la región que define la placa y $\rho$ es la densidad.

**P7.-** Calcule

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-|x|}\int_{0}^{2x+y} dz\, dy\, dx$$

utilizando los órdenes de integración $dx\, dy\, dz$ y $dy\, dz\, dx$.

**P8.-** Calcule el volumen de la región acotada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \\ z &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

**P9.-** Calcule el volumen de la región determinada por las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &\leq 9 \\ y + 2z &\leq 6 \\ y - 2z &\leq 6 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

**P10.-** Una bola centrada en el origen y de radio $R$ se corta por un plano horizontal a una altura $h$ $(0 < h < R)$. Calcular el volumen de la parte superior de la esfera que se encuentra sobre dicho plano.

**P11.-** Considere la integral iterada:

$$I = \int_0^{2a} \left( \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy \right) dx$$

donde $f$ es una función continua.

a) Haga un bosquejo de la región de integración.

b) Exprese $I$ como una integral iterada cambiando el orden de integración.

**P12.-** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando el **Teorema de Fubini**.

Hint: Defina la función $g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, e integre sobre un rectángulo arbitrario $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Luego justifique el hecho de que una función continua es nula ssi su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula.

**Regla de Leibnitz**

**P13.-** Considere la función:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds+\frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\sigma,s)d\sigma ds.$$

Demuestre que:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & F(x,t). \\ u(x,0) & = & f(x). \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x). \end{array}$$

**P14.-** Sea

$$g(s,t) = \begin{cases} s(t-1) & 0 \le s \le t \\ t(s-1) & t \le s \le 1 \end{cases}$$

y

$$x(t) = \int_0^1 g(s,t)\ [\mathrm{sen}(x(s)) - f(s)]\ ds$$

Pruebe que $x$ satisface la siguiente E.D.O.:

$$\begin{array}{rcl} x''(t) & = & \mathrm{sen}(x(t)) + f(t) \\ x(0) & = & 0 \\ x(1) & = & 0 \end{array}$$

## 3. PROBLEMAS RESUELTOS

**P15.-** **(P2 b) EX OT 2004, A. Jofré)**
Sea $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que:

$$Y(t) = at + \int_0^t Y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)\,d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donde $a$ es una constante. Calcule $Y''$ y deduzca una fórmula explícita para $Y(t)$.

**Solución**

Calculemos las derivadas utilizando la regla de Leibnitz:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= a + Y(t)\,\mathrm{sen}(t-t) - 0 + \textstyle\int_0^t Y(\tau)\,\cos(t-\tau)\,d\tau \\ &= a + \textstyle\int_0^t Y(\tau)\,\cos(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y''(t) &= Y(t)\,\cos(0) + \textstyle\int_0^t Y(\tau)\,(-\,\mathrm{sen}(t-\tau))\,d\tau \\ &= Y(t) - (Y(t) - at) \\ &= at \end{aligned}$$

además es posible obtener condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} Y(0) &= a\,0 + \textstyle\int_0^0 Y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)\,d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'(0) &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

Luego, es posible obtener $Y$ mediante integración:

$$\begin{aligned} Y''(t) &= at \\ Y'(t) &= Y'(0) + \textstyle\int_0^t Y''(\tau)\,d\tau \\ &= a + \tfrac{at^2}{2} \\ Y(t) &= Y(0) + \textstyle\int_0^t a + \tfrac{at^2}{2} d\tau \\ &= 0 + at + \tfrac{at^3}{6} \end{aligned}$$

**P16.- (P1 a) EX OT 2006, J. D. Dávila)**
Calcule:

$$\int_0^1 \int_w^1 (x-w)\,\mathrm{sen}(x^3)\,dxdw$$

**Solución**

Usando el Teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 \int_w^1 (x-w)\,\mathrm{sen}\,x^3 dx\,dw &= \textstyle\int_0^1 \int_0^x (x-w)\,\mathrm{sen}\,x^3 dw\,dx \\ &= \textstyle\int_0^1 \left( x^2\,\mathrm{sen}\,x^3 - \tfrac{x^3}{2}\,\mathrm{sen}\,x^3 \right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \textstyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{sen}\,x^3 dx \\ &= \tfrac{1}{2}(-\cos 1^3 + \cos 0^3) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1) \end{aligned}$$