Capítulo 1

Homeomorfismos entre espacios topológicos

1.1 Homeomorfismo

El proceso de *clasificar* es básico en la Ciencia, y en particular, en Matemáticas. Así por ejemplo, y en el Álgebra Lineal, se clasifica espacios vectoriales mediante isomorfismos; en la teoría de grupos se usa isomorfismos de grupos, etc. En Topología, la clasificación se realiza mediante las aplicaciones que son más interesantes entre espacios topológicos y que se llaman *homeomorfismos* . En este sentido, se puede decir que este capítulo es básico para entender qué hace la Topología.

A continuación se tiene el concepto más importante de este capítulo.

Definición 1.1.1 *Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre dos espacios topológicos se llama homeomorfismo si es una aplicación biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas.*

Una de las finalidades de la Topología es discernir si entre dos espacios topológicos existe o no un homeomorfismo. En tal caso, estos dos espacios se considerarán iguales. Concretamente, es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 1.1.2 *1. La aplicación identidad es un homeomofismo.*

2. La aplicación inversa de un homeomorfismo, es un homeomorfismo.

3. *La composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Si se denota por $\mathcal{H}((X,\tau))$ o simplemente $\mathcal{H}(X)$ si se sobreentiende la topología, al conjunto de homeomorfismos de X en X, este resultado nos dice que dicho conjunto es un grupo con la composición de aplicaciones como operación binaria. Así, en un espacio topológico discreto, se ha probado que el grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}(X)$ coincide con el conjunto de todas las biyecciones dadas de él en sí mismo. También, en un espacio topológico con la topología a derechas, el grupo de homeomorfismos del espacio en sí mismo es el conjunto de las aplicaciones crecientes y biyectivas.

Definición 1.1.3 *Se dice que un espacio topológico (X,τ) es homeomorfo a otro espacio (Y,τ') si existe un homeomorfismo entre (X,τ) e (Y,τ').*

A raíz de la proposición 1.1.2, esta relación binaria constituye una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios topológicos. Se dirá entonces que los espacios (X,τ) e (Y,τ') son homeomorfos y se escribirá $X \cong Y$. Por tanto, en el conjunto de los espacios topológicos, la relación 'ser homeomorfos' determina un conjunto cociente, donde cada una de las clases de equivalencia la constituye un espacio topológico y todos los demás que son homeomorfos a dicho espacio.

Uno de los objetivos de la Topología es entender y comprender este conjunto cociente, en un doble sentido. Primero, dado un espacio topológico saber a qué clase pertenece. Por otro lado, dados dos espacios topológicos, discernis si son o no homeomorfos.

Desde el punto de vista intuitivo, se puede imaginar un homeomorfismo entre dos espacios topológicos como una *deformación bicontinua* de uno en otro. Así por ejemplo, no es difícil pensar que el grafo de una función continua $y = f(x)$ es homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$ como muestra la figura 1.1.

Se enuncia varias condiciones equivalentes para que una aplicación sea un homeomorfismo.

Teorema 1.1.4 *Se considera una aplicación biyectiva $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre dos espacios topológicos. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *f es homeomorfismo.*
2. *f es continua y $f(O) \in \tau'$ para cualquier $O \in \tau$.*

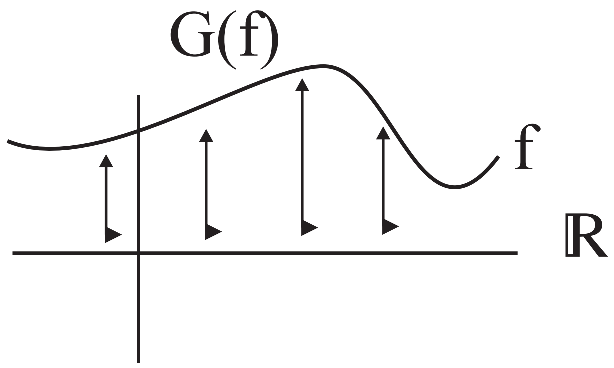

Figura 1.1: El grafo de f es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

3. *f es continua y $f(F) \in \mathcal{F}^{'}$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$.*
4. *$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de X.*
5. *f es continua y $f(U)$ es entorno de $f(x)$ para cualquier entorno U de $x \in X$.*

También es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 1.1.5 *Sea una aplicación biyectiva $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ entre espacios topológicos. Entonces son equivalentes:*

1. *f es homeomorfismo.*
2. *$\tau' = \{f(O); O \in \tau\}$.*
3. *$\mathcal{F}' = \{f(F); F \in \mathcal{F}\}$.*
4. *Si β es una base de τ, entonces $f(\beta)$ es base de τ'.*
5. *Si β_x se base de entornos de $x \in X$, entonces $f(\beta_x)$ es una base de entornos de $f(x)$ para cada $x \in X$.*
6. *Si $x \in X$, el sistema de entornos de $f(x)$ es*
$$\mathcal{U}^{'}_{f(x)} = \{f(U); U \in \mathcal{U}_x\}.$$

Se estudia ahora el comportamiento de un homeomorfismo cuando restringimos la aplicación a un subconjunto del dominio.

Proposición 1.1.6 *Sea un homeomorfismo* $f(X,\tau) \to (Y,\tau')$ *entre dos espacios topológicos y* $A \subset X$. *Entonces* $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (f(A), {\tau'}_{f(A)})$ *es homeomorfimo.*

Demostración: Sólamente hay que darse cuenta de que $(f_{|A})^{-1} = (f^{-1})_{|f(A)}$. q.e.d

Esta proposición es muy útil, ya que muchas veces el homeomorfismo que se define entre dos espacios topológicos no es más que la restricción de un homeomorfismo entre espacios más grandes. El siguiente ejemplo es una buena muestra de ello.

Ejemplo 1.1.7 Se prueba que dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son homeomorfos entre sí. El conjunto de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ es

$$\{(a,b); a < b,\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}.$$

Para ello, se distingue los distintos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

- Si $a, b \in \mathbb{R}$, se prueba que $(a,b) \cong (0,1)$. Se define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Esta aplicación es biyectiva, continua y su inversa, $f^{-1}(x) = (b-a)x + a$, también es continua. Además $f((a,b)) = (0,1)$, luego la restricción de f al intervalo (a,b), nos define el homeomorfismo entre (a,b) y $(0,1)$.

- A continuación se prueba que dos intervalos del tipo $(a,+\infty)$ y $(b,+\infty)$ son homeomorfos. De nuevo, se define una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x + b - a$. Esta aplicación es biyectiva, con inversa, $f^{-1}(x) = x - b + a$ y ambas son continuas. Por otra parte $f((a,+\infty)) = (b,+\infty)$, luego los dos intervalos son homeomorfos.

- El intervalo $(a,+\infty)$ es homeomorfo al intervalo $(-\infty,-a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Para ello, se define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = -x$ cuya inversa es ella misma y $f((a,+\infty)) = (-\infty,-a)$.

- La aplicación $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ nos define un homeomorfismo entre el intervalo $(0,1)$ y el intervalo $(1,+\infty)$. La aplición inversa de f es $f^{-1}(x) = 1/x$.

- Por último, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cuya función inversa es la función arco tangente.

Usando la proposición 1.1.2, el razonamiento hecho nos asegura que dos intervalos cualesquiera de $\mathbb{R}$ son homeomorfos. †

Se analiza a continuación el problema de clasificación de cualquier intervalo (abierto o no) de $\mathbb{R}$. Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a una de las siguientes familias de subconjuntos.

- $X_1 = \{(a,b); a < b,\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$.
- $X_2 = \{[a,b]; a, b \in \mathbb{R}\}$.
- $X_3 = \{[a,b); a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} \cup \{(a,b]; a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R}\}$.

Se ha probado que todos los intervalos que pertenecen a X_1 son homeomorfos entre sí.

Por otra parte, la aplicación $x \longmapsto \frac{x-a}{b-a}$ es un homeomorfismo entre $[a,b]$ y $[0,1]$, luego todos los elementos de X_2 son homeomorfos entre sí. Tampoco es difícil probar que lo mismo sucede entre todos los elementos de X_3. Para finalizar nos quedaría estudiar si intervalos que pertenecen a distintos conjuntos X_i, $i = 1, 2, 3$ son o no homeomorfos. Se volverá a este problema al final del ejemplo 1.1.11.

Una herramienta muy útil a la hora de asegurarnos que dos espacios *no* son homeomorfos, es el concepto de invariante topológico o propiedad topológica.

Definición 1.1.8 *Una propiedad topológica o un invariante topológico es una propiedad $\mathcal{P}$ de forma que si un espacio topológico (X, τ) satisface $\mathcal{P}$, entonces todos los espacios topológicos homeomorfos a X también la satisface.*

De esta forma, si se tiene dos espacios topológicos tales que existe una propiedad topológica que la satisface un espacio y no el otro, entonces estos espacios no son homeomorfos. El problema de probar que dos espacios son homeomorfos es totalmente diferente, pues en tal caso habría que construir un homeomorfismo entre ellos.

La Topología estudia las distintas propiedades topológicas, las cuales permiten clasificar los espacios topológicos. Se puede decir que este Curso de Topología no es más que el estudio de una serie de propiedades topológicas encaminadas a dicha clasificación. En los siguiente tres ejemplos se muestran algunas propiedades topológicas.

Ejemplo 1.1.9 El segundo axioma de numerabilidad es una propiedad topológica: sea (X, τ) un espacio topológico, β una base numerable de la topología y un homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo. Entonces $f(\beta)$ es una base de

τ' (corolario 1.1.5) y evidentemente numerable, luego (Y, τ') también satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Como consecuencia, $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_D)$, pues ya se probó que cualquier base β de la topología discreta contiene a la base $\{\{x\}; x \in \mathbb{R}\}$ y por tanto su cardinal es no numerable. Sin embargo, la topología usual de $\mathbb{R}$ tiene bases numerables.

†

Ejemplo 1.1.10 La propiedad T_0 es una propiedad topológica. Sea (X, τ) un espacio T_0 y un homeomorfismo $f(X, \tau) \to (Y, \tau')$. Se prueba que (Y, τ') también satisface la propiedad T_0: sean $y_1 \neq y_2$ y $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Ya que (X, τ) es T_0, se puede suponer que existe $U \in \mathcal{U}_{x_1}$ tal que $x_2 \notin U_1$. Entonces $f(U)$ es un entorno de $f(x_1)$ (corolario 1.1.5) y no contiene a $f(x_2)$.

Ejemplo 1.1.11 Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si "toda aplicación continua $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ alcanza máximo". Se prueba que $\mathcal{P}$ es un invariante topológico.

Sea (X, τ) un espacio que satisface la propiedad $\mathcal{P}$ y $\phi : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo. Se prueba que toda aplicación continua definida en (Y, τ') con valores reales, alcanza su máximo. Para ello, se considera una aplicación continua $g : (Y, \tau') \to \mathbb{R}$ y la aplicación $g \circ \phi$ definida en (X, τ). Por hipótesis, existe $x_0 \in X$ tal que $(g \circ \phi)(x) \leq (g \circ \phi)(x_0)$ para cualquier $x \in X$. Luego, por ser ϕ una aplicación biyectiva, g alcanza en $\phi(x_0)$ un máximo.

Como consecuencia, y usando conocimientos básicos del Cálculo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ satisface $\mathcal{P}$ pero $(0, 1)$ no lo satisface, y por tanto, los intervalos del tipo X_2 que aparecen en el ejemplo 1.1.7 no son homeomorfos a los intervalos de X_1. De la misma forma, el intervalo $(0, 1]$ no satisface la propiedad $\mathcal{P}$: por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ no tiene un máximo en $(0, 1]$. Por tanto, los intervalos de X_2 no son homeomorfos a los intervalos de X_3. Quedaría por distinguir los intervalos de X_1 con los intervalos de X_3, pero para ello se necesita nuevos invariantes topológicos que aparecerán a lo largo del curso.

Los invariantes topológicos nos permiten afirmar que dos espacios topológicos *no* son homeomorfos. Sin embargo, no es cierto el recíproco, es decir, dos espacios que no son homeomorfos pueden satisfacer la misma propiedad topológica. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ tanto con la topología discreta como con la topología usual es T_0 y sin embargo, no son espacios homeomorfos. A continuación se va a otra situación análoga.

Ejemplo 1.1.12 Sea (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{H}(X,\tau)$ el espacio de todos los homeomorfismos de (X,τ) en (X,τ). Este conjunto se le dota de estructura de grupo, con la composición de homeomorfismos como operación. En un primer estudio, se va a probar que si (Y,τ') es un espacio topológico homeomorfo a (X,τ), entonces $\mathcal{H}(Y)$ es un grupo isomorfo a $\mathcal{H}(X)$. Para ello, se considera un homeomorfismo $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$. Se define $\phi:\mathcal{H}(X)\to\mathcal{H}(Y)$ mediante

$$\phi(T)=f\circ T\circ f^{-1}.$$

Entonces $\phi(T)$ es un homeomorfimo de Y en Y, por ser composición de homeomorfismos. Además ϕ es biyectiva y

$$\phi(T\circ G)=f\circ T\circ G\circ f^{-1}=(f\circ T\circ f^{-1})\circ(f\circ G\circ f^{-1})=\phi(T)\circ\phi(G).$$

Se ha probado por tanto, que 'ser isomorfos los grupos $\mathcal{H}(X,\tau)$' es una propiedad topológica.

Sin embargo dos espacios pueden tener grupos de homeomorfismos isomorfos, pero no ser los espacios homeomorfos. Como ejemplo, se tiene el siguiente. Sea un conjunto infinito X. Ya se probó que cualquier aplicación cuyo dominio es (X,τ_D) es continua. Por tanto, el conjunto de homeomorfismos de X con la topología discreta en sí mismo es el conjunto $\mathrm{Biy}(X)$ de todas las biyecciones de X. Se demuestra ahora que si X tiene la topología de los complementos finitos, cualquier biyección también es continua. Pero esto es evidente, pues si $f:(X,\tau_{CF})\to(X,\tau_{CF})$ una aplicación biyectiva, y como el conjunto de cerrados es la familia de subconjuntos finitos, la imagen de cualquier conjunto finito es finito. Por tanto, f es un homeomorfismo (corolario 1.1.5).

Sin embargo, (X,τ_D) y (X,τ_{CF}) no son espacios topológicos homeomorfos: supóngase que existe un homeomorfismo $f:(X,\tau_D)\to(X,\tau_{CF})$. Por el teorema 1.1.4, esta aplicación lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, luego $f(\{x\})\in\tau_{CF}$, pero esto es falso, pues $X\setminus\{f(x)\}$ no es un conjunto cerrado en (X,τ_{CF}) al no ser un conjunto finito.

1.2 Ejemplos de homeomorfismos

En esta sección se va a mostrar algunos ejemplos de construcción de homeomorfismos entre subconjuntos de espacios euclídeos. Se necesitará previamente un resultado para caracterizar funciones continuas con codominio un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.1 *Sea* $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}^n$. *Para cada* $x \in X$, *se considera* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, *donde* $f_i = p_i \circ f$, *con* $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la i-ésima proyección. Entonces la aplicación* f *es continua si y sólo si las aplicaciones* f_i *son continuas para cada* $i = 1, \ldots, n$.

Demostración: Es evidente que si f es continua, f_i sea continua por ser composición de dos aplicaciones continuas. Para el recíproco, sea $x_0 \in X$. Entonces

$$d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2}.$$

Dado $\epsilon > 0$, como cada aplicación f_i es continua en x_0, existe $U_i \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que si $x \in U_i$,

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Sea $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ que es entorno de x_0. Entonces es evidente que si $x \in U$, $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. q.e.d

Corolario 1.2.2 *Toda aplicación afín de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *es continua. Además una afinidad de* $\mathbb{R}^n$ *es un homeomorfismo. En particular, los isomorfismos lineales, las traslaciones y las homotecias son homeomorfismos de* $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Se considera una aplicación afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces existe $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ y una matriz A de orden $m \times n$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_m) + (x_1, \ldots, x_n)A^t,$$

donde A^t es la matriz traspuesta de A. Para probar que f es continua hay que ver si $p_i \circ f$ es continua, para cad $i = 1 \ldots m$. Pero

$$(p_i \circ f)(x_1, \ldots, x_n) = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j)(x_1, \ldots, x_n),$$

es decir, $p_i \circ f = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$, que es una aplicación continua.

El hecho de que la inversa de una afinidad es una afinidad, prueba que también es un homeomorfismo. q.e.d

Ejemplo 1.2.3 Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una aplicación continua y se denota por $G(f)$ el grafo de f, es decir, $G(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+1};x\in\mathbb{R}^n\}$. Entonces $G(f)\cong\mathbb{R}^n$. Para ello, se define $\phi:G(f)\to\mathbb{R}^n$ mediante $\phi(x,f(x))=x$. Esta aplicación es continua y su inversa, $\phi^{-1}(x)=(x,f(x))$ es evidentemente continua.

Ejemplo 1.2.4 Toda bola $B_r(a)$, donde $a\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Primero se prueba que la bola $B_r(a)$ es homeomorfa a la bola $B_1(0)$. Para ello, se define la aplicación $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dada por $F=T_a\circ h_r$, donde h_r es la homotecia de razón $r>0$ y T_a es la traslación de vector de traslación a, es decir, $h_r(x)=rx$ y $T_a(x)=x+a$. Entonces F es un homeomorfismo y evidentemente $F(B_1(0))=B_r(a)$. Usando la proposición 1.1.6 estas dos bolas son homeomorfas.

Se prueba que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $B_1(0)$. Sea un homeomorfismo creciente h entre $[0,1)$ y el intervalo $[0,\infty)$ de forma que $h(0)=0$ y $h(1)=\infty$ (por ejemplo, $h(r)=\frac{r}{1-r}$). Se define para cada $x\in B_1(0)$,

$$F(x)=\frac{h(|x|)}{|x|}x=\frac{x}{1-|x|}.$$

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$G(y)=\frac{y}{1+|y|}.$$

Las aplicaciones F y G son continuas pues sus funciones coordenadas son continuas: en el caso de F,

$$p_i\circ F=\frac{p_i}{1-\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}},$$

y para la aplicación G,

$$p_i\circ G=\frac{p_i}{1+\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}}.$$

†

En el ejemplo anterior, se ha probado que todas las bolas de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre sí. Esto no ocurre en cualquier espacio métrico, ni incluso en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $X=\{0\}\cup[2,4)\subset\mathbb{R}$, se tiene

$$B_1(0)=\{0\},\quad B_1(2)=[2,3),\quad B_1(3)=(2,4),$$

y ningún par de estos conjuntos son homeomorfos entre sí.

Ejemplo 1.2.5 Sea un subespacio afín $A \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $m \leq n$. Entonces A es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Como consecuencia, si $m \leq n$, $\mathbb{R}^m$ se embebe en $\mathbb{R}^n$ como un subespacio afín.

La demostración se realiza en varias etapas.

1. Supóngase que $A = p + L\{v_1, \ldots, v_m\}$ donde $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base del subespacio vectorial asociado a A y $L\{v_1, \ldots, v_m\}$ es el subespacio vectorial generado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Se sabe que existe una afinidad de $\mathbb{R}^n$ que lleva A en $L\{v_1, \ldots, v_m\}$. Por tanto, $A \cong L\{v_1, \ldots, v_m\}$.

2. Se considera ahora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$. De nuevo $L\{v_1, \ldots, v_m\} \cong L\{e_1, \ldots, e_m\}$ al haber una afinidad de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo que me lleva la base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ en $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

3. Por último, se prueba que $L\{e_1, \ldots, e_m\} \cong \mathbb{R}^m$. Se define $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Esta aplicación es inyectiva, continua y $g(\mathbb{R}^m) = L\{e_1, \ldots, e_m\}$. La aplicación inversa de g es $g^{-1}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_m)$: esta aplicación es continua porque g^{-1} es la restricción a $L\{e_1, \ldots, e_m\}$ de la aplicación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ dada por $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_m)$.

Ejemplo 1.2.6 Sea llama *corona circular* al conjunto definido por

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r < \sqrt{x^2 + y^2} < R\},$$

donde $0 \leq r < R \leq \infty$. Por otra parte se define el *cilindro de radio* 1 como el conjunto

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}.$$

Se demuestra que ambos conjuntos son homeomorfos.

Para ello, se considera un homeomorfismo $h : (r, R) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga $h(r) = -\infty$ y $h(R) = +\infty$. Se define entonces $F : C_1 \rightarrow C_2$ por

$$F(p) = \left(\frac{p}{|p|}, h(|p|)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, h(\sqrt{x^2 + y^2})\right), \quad p = (x, y).$$

Esta aplicación es continua pues

$$p_1 \circ F = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

$$p_2 \circ F = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

$$p_3 \circ F = h \circ \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

La inversa es la aplicación $G(a, b, c) = (ah^{-1}(c), bh^{-1}(c))$, que de nuevo es continua. Por tanto, F es un homemorfismo.

Concretamente (ver figura 1.2) la aplicación F lleva circunferencias concéntricas de la corona C_1 en circunferencias paralelas al plano $\{z = 0\}$ en el cilindro C_2, de forma que si las circunferencias se van acercando a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, en el cilindro se obtiene circunferencias cuyas terceras coordenadas van tendiendo a $-\infty$. Y si las circunferencias van hacia $x^2 + y^2 = R^2$, sus imágenes son circunferencias con terceras coordenadas yendo a $+\infty$.

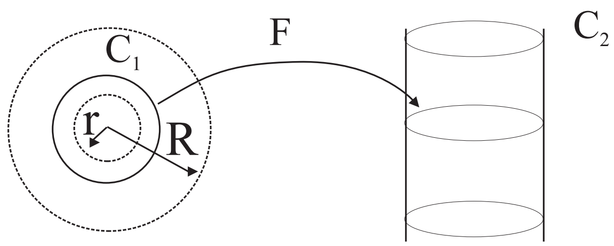

Figura 1.2: Un homeomorfismo entre la corona C_1 y el cilindro C_2.

Ejemplo 1.2.7 Se prueba que si $p \in \mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Primero se va a probar que si $p, q \in \mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$. Para ello se consideran las siguientes bases ortonormales de $\mathbb{R}^{n+1}$:$\{p, e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{q, u_1, \ldots, u_n\}$. Sea una isometría lineal $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\phi(p) = q$ y $\phi(e_i) = u_i, 1 \leq i \leq n$. Ya que ϕ es una isometría, es un homeomorfismo. Además, $\phi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$. Como $\phi(p) = q$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \phi(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) = \phi(\mathbb{S}^n) \setminus \{\phi(p)\} = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$.

Se llama el Polo Norte de $\mathbb{S}^n$ al punto $N = (0, \ldots, 0, 1)$ y se prueba que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Se define la aplicación $p : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ por

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Esta aplicación se llama la *proyección estereográfica* desde el Polo Norte (figura 1.3). La proyección estereográfica aplica cada punto $(x_1 \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ en el punto

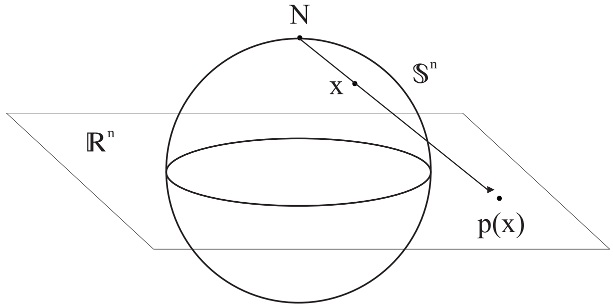

Figura 1.3: La proyección estereográfica.

del hiperplano $x_{n+1} = 0$ que se obtiene de intersecar con dicho hiperplano la recta que une N con el punto $(x_1 \ldots, x_{n+1})$.

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$p^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{-1 + |x|^2}{1 + |x|^2} \right).$$

Como estas aplicaciones son continuas, p es un homeomorfismo.

†

Ejemplo 1.2.8 Como consecuencia del ejemplo anterior, $\mathbb{R}^2$ se embebe en $\mathbb{S}^2$ como el conjunto $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Esto permite *representar* de forma bicontinua la esfera menos un punto como un plano: si se supone que la Tierra es la esfera $\mathbb{S}^2$ y el plano $\mathbb{R}^2$ es un mapa, el embebimiento nos *dibuja* la Tierra menos el polo Norte en un papel de forma homeomorfa y puntos de la Tierra que están cercanos, aparecen en el dibujo próximos. Se dice entonces que se ha realizado una *proyección estereográfica* de la Tierra.

Además, en el caso particular $n = 2$, y usando notación compleja identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, la aplicación p^{-1} se escribe como

$$p^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1 + |z|^2}, \frac{-1 + |z|^2}{1 + |z|^2} \right).$$

†

1.3 Embebimientos, aplicaciones abiertas y cerradas

Definición 1.3.1 *Un embebimiento es una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *entre dos espacios topológicos tal que*

$$f : (X, \tau) \to (f(X), \tau'_{|f(X)})$$

es un homeomorfismo. Se dirá entonces que X *está embebido en* Y *mediante* f.

Mediante un embebimiento, el espacio X es topológicamente igual que un subconjunto de Y con su topología relativa, y todas las propiedades topológicas que posee este subconjunto también las tiene X. Por ejemplo, todo homeomorfismo es un embebimiento.

La demostración de la siguiente proposición es evidente.

Proposición 1.3.2 *Se considera un embebimiento* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *y un homeomorfismo* $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$. *Entonces* $g \circ f$ *es un embebimiento.*

Proposición 1.3.3 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *y* A *un subconjunto suyo con una topología* τ'. *Entonces la aplicación inclusión* $i : (A, \tau') \to (X, \tau)$ *es un embebimiento si y sólo si* $\tau' = \tau_{|A}$.

Demostración: Supóngase que i es un embebimiento. Entonces la aplicación identidad $i : (A, \tau') \to (A, \tau_{|A})$ es un homeomorfismo. El corolario 1.1.5 nos asegura que τ' es $\tau_{|A}$. El recíproco es análogo. q.e.d

Ejemplo 1.3.4 El intervalo $(0, 1)$ se embebe en $[0, 1]$ mediante la inclusión. Por otra parte, $[0, 1]$ también se embebe en $(0, 1)$ de la siguiente forma: por una parte se considera un homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ y por otra $[0, 1]$ se embebe en $\mathbb{R}$ con la inclusión. Las proposiciones 1.3.2 y 1.3.3 nos aseguran entonces que $g \circ i$ es un embebimiento de $[0, 1]$ en $(0, 1)$.

Definición 1.3.5 *Una aplicación entre espacios topológicos* $f(X, \tau) \to (Y, \tau')$ *se llama abierta (resp. cerrada) si* $f(O) \in \tau'$, *para cualquier subconjunto abierto* O *de* X *(resp.* $f(F) \in \mathcal{F}'$, *para todo* $F \in \mathcal{F}$*).*

Del teorema 1.1.4, se deduce que una aplicación biyectiva entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si y sólamente si es continua y es abierta, o si es continua y cerrada.

Proposición 1.3.6 *Sea una aplicación abierta* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *y* $x \in X$*. Entonces para cada* $U \in \mathcal{U}_x$*,* $f(U) \in \mathcal{U}'_{f(x)}$*.*

Demostración: Sea O un conjunto abierto en X tal que $x \in O \in U$. Entonces $f(x) \in f(O) \subset f(U)$. Ya que $f(O)$ es un conjunto abierto en Y, $f(U)$ es un entorno de $f(x)$. q.e.d

Esta proposición nos dice que una aplicación abierta lleva entornos en entornos. Por ello, aquellos invariantes topológicos definidos "localmente" alrededor de un punto se mantendrán por aplicaciones continuas y abiertas.

A continuación se caracteriza las aplicaciones abiertas.

Teorema 1.3.7 *Sea una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$*. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. f *es una aplicación abierta.*
2. $f(\mathring{A}) \subset int\ (f(A))$*, para cualquier* $A \subset X$*.*
3. *Si* β *es una base de* τ*, entonces* $f(B) \in \tau'$*, para cada* $B \in \beta$*.*
4. *Para cada* $x \in X$ *y* $U \in \mathcal{U}_x$*, existe* $V \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ *tal que* $V \subset f(U)$*.*
5. *Para cada* $x \in X$ *y* $U \in \mathcal{U}_x$*,* $f(U)$ *es entorno de* $f(x)$*.*

Demostración: $1 \Rightarrow 2$. Como $\mathring{A}$ es un conjunto abierto, $f(\mathring{A})$ es un conjunto abierto. Por tanto

$$f(\mathring{A}) = \text{int } (f(\mathring{A}) \subset \text{int } (f(A)).$$

$2 \Rightarrow 3$. Para cada $B \in \beta$, int $(f(B)) \subset f(\mathring{B}) = f(B)$, luego int $(f(B)) = f(B)$, es decir, $f(B)$ es un conjunto abierto.

$3 \Rightarrow 4$. Sea $x \in X, U \in \mathcal{U}_x$ y $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Como τ es base de topología de ella misma, $f(O)$ es un conjunto abierto en Y: se elige $V = f(O)$.

$4 \Rightarrow 5$. Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que $f(x) \in V \subset f(U)$, luego $f(U)$ es entorno de $f(x)$.

$5 \Rightarrow 1$. Sea $O \in \tau$ y sea $f(x) \in f(O)$, con $x \in O$. Como O es un entorno de x, $f(O)$ es entorno de $f(x)$. q.e.d

Corolario 1.3.8 *Sea una aplicación biyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es homeomorfismo si y sólamente si para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overset{\circ}{A}) = int\ (f(A)$.*

Teorema 1.3.9 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es cerrada si y sólo si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, para cualquier $A \subset X$.*

Demostración: Supóngase que f es cerrada y sea $A \subset X$. Entonces $f(\overline{A})$ es un conjunto cerrado de Y, luego $\overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. Pero $f(A) \subset f(\overline{A})$. Si se considera adherencias en esta inclusión

$$\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A}).$$

Se prueba ahora el recíproco. Sea un conjunto cerrado F de X. Por hipótesis, $\overline{f(F)} \subset f(F)$. Pero siempre se tiene $f(F) \subset \overline{f(F)}$, $f(F)$ es un conjunto cerrado de (Y, τ'). q.e.d

Como ejemplo de aplicaciones cerradas se tiene todas las aplicaciones entre dos espacios topológicos dotados ambos de la topología de los complementos finitos, ya que la imagen de un conjunto finito es finito.

Proposición 1.3.10 *Sean las aplicaciones proyecciones $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$,*

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Entonces p_i es una aplicación abierta pero no es cerrada.

Demostración: Para probar que es abierta se usa el teorema 1.3.7. Se considera la familia β de bolas de $\mathbb{R}^n$. Dada una bola $B_r(x)$, se demuestra que $p_i(B_r(x)) = (a - r, a + r)$, con $x_i = a$: sea $z \in B_r(x)$, entonces

$$(z_1 - x_1)^2 + \ldots + (z_n - x_n)^2 < r^2,$$

luego $z_i - a < r$ y así $p_i(z) \in (a-r, a+r)$. Sea ahora $\delta \in (a-r, a+r)$. Llamando $z = (x_1, \ldots, \delta, \ldots, x_n)$, $p_i(z) = \delta$ y $d(z,x)^2 = (\delta - a)^2 < r^2$. Por otro lado, las aplicaciones p_i no son cerradas. Así por ejemplo, se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$. Este conjunto es cerrado, pues $A = f^{-1}(\{0\})$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por la aplicación continua $f(x,y) = xy - 1$ y $\{0\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que no es cerrado. q.e.d

Proposición 1.3.11 *Se considera $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones entre tres espacios topológicos.*

1. *Si f y g son aplicaciones abiertas (resp. cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada).*
2. *Si $g \circ f$ es una aplicación abierta (resp. cerrada) y f es sobreyectiva y continua, entonces g es abierta (resp. cerrada).*
3. *Si $g \circ f$ es una aplicación abierta (resp. cerrada) y g es inyectiva y continua, entonces f es abierta (resp. cerrada).*

Definición 1.3.12 *Un homeomorfismo local es una aplicación $f(X,\tau) \to (Y,\tau')$ tal que para cada $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que*

$$f : (U, \tau_{|U}) \longrightarrow (f(U), \tau'_{|f(U)}).$$

es un homeomorfismo. Se dice que X es localmente homeomorfo a Y si para cada $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ y existe $y \in Y$ y $V \in \mathcal{U}'_y$ tal que U es homeomorfo a V.

Evidentemente, si entre un espacio topológico X y otro Y hay un homeomorfismo local, X es localmente homeomorfo a Y. También, es cierto que la composición de un homeomorfismo con un homeomorfismo local es un homeomorfismo local.

Ejemplo 1.3.13 Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$. Concretamente la aplicación inclusión $i : O \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo local. Paa ello, sea $x \in O$ y sea $r >=$ tal que $(x-r, x+r) \subset O$. Entonces $(x-r, x+r) \cong \mathbb{R}$. Se verá más tarde en el ejemplo 1.2.4 que este resultado se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$.

Dos espacios topológicos X e Y son *localmente homeomorfos* si X es localmente homeomorfo a Y y viceversa. Un espacio puede ser localmente homeomorfo a otro, pero no al revés. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R} \times \{0\}$ e $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Entonces X es localmente homeomorfo a Y, pero $(0,0) \in Y$ no tiene ningún entorno homeomorfo a ningún entorno de ningún punto de X.

Proposición 1.3.14 *Sea un homeomorfismo local $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es una aplicación continua y abierta.*

Demostración: La continuidad de f es evidente porque la continuidad es una propiedad local.

Se prueba ahora que es abierta usando el teorema 1.3.7. Sea $x \in X$ y $W \in \mathcal{U}_x$. Se prueba que $f(W)$ es un entorno de $f(x)$. Ya que f es un homeomorfismo local, existe un entorno U de x y un entorno V' de $f(x)$ tal que $f : U \to V'$ es un homeomorfismo. Entonces $U \cap W$ es un entorno de x en la topología relativa de U y como f es un homeomorfismo entre U y V', el conjunto $f(U \cap W)$ es un entorno de $f(x)$ en la topología relativa de V'. Ya que V' también es un entorno de $f(x)$, $f(U \cap W)$ es un entorno de $f(x)$ en Y. Por tanto, $f(U \cap W) \subset f(W)$ y es un entorno de $f(x)$. q.e.d

Ejemplo 1.3.15 La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

es un homeomorfismo local y no es una aplicación cerrada.

En $t = 0$ se prueba que existe $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo. Para ello, sea $U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $f(U) = \{(\cos(t), \operatorname{sen}(t)); -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\}$. La inversa de f es la aplicación $f^{-1} : f(U) \to U$ dada por $f^{-1}(x, y) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(y/x)$. Tanto f como f^{-1} son aplicaciones continuas.

Sea ahora $t_0 \in \mathbb{R}$. Se define $V = T(U)$, donde $T(t) = t + t_0$. Entonces T es un homoemorfismo y V es entorno de t_0. Falta probar que $f : V \to f(V)$ es un homeomorfismo. Se considera $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el giro vectorial definido por $\phi((1, 0)) = (\cos(t_0), \operatorname{sen}(t_0))$ y $\phi((0, 1)) = (-\operatorname{sen}(t_0), \cos(t_0))$, es decir,

$$\phi(x, y) = (\cos(t_0 = x - \operatorname{sen}(t_0)y, \operatorname{sen}(t_0)x + \cos(t_0)y).$$

Un giro de $\mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo. Finalmente, se demuestra que $f_{|V} = \phi \circ f_{|U} \circ T^{-1}$. Sea $t \in V$,

$$\phi \circ f_{|U} \circ T^{-1}(t) = \phi(\cos(t - t_0), \operatorname{sen}(t - t_0)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = f(t).$$

Sin embargo f no es una aplicación cerrada: para ello, se considera la sucesión

$$F = \{2\pi n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Este conjunto es cerrado, pero

$$f(F) = \left\{ f\left(2\pi n + \frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esta sucesión es convergente en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y su límite es $(1,0)$. Ya que no contiene al límite $f(F)$ no es un conjunto cerrado.

1.4 Ejercicios

1. Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1, τ_2. Probar que la aplicación identidad $1_X : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ es un homeomorfismo si y sólo si $\tau_1 = \tau_2$.

2. Probar que una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y sólamente se satisface alguna de las siguientes propiedades:
   - $f^{-1}(\text{int }(B)) \subset \text{int }(f^{-1}(B))$, para cada $B \subset Y$.
   - $f^{-1}(\text{ext}(B)) \subset \text{ext}(f^{-1}(B))$, para cada $B \subset Y$.
   - $f^{-1}(\text{Fr}(B)) \supset \text{Fr}(f^{-1}(B))$, para cada $B \subset Y$.

3. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo y $A \subset X$. Entonces
   - $int(f(A)) = f(int(A))$.
   - $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.
   - $ext(f(A)) = f(ext(A))$.
   - $Fr(f(A)) = f(Fr(A))$.

4. Sea $X = \{a,b\}$ y sea en X las topologías $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Probar que (X,τ_1) es homeomorfo a (X,τ_2).

5. Probar que la propiedad "ser metrizable" es una propiedad topológica.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación continua $f : A \to \mathbb{R}$. Probar que el grafo de f definido por $G(f) = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R}; y = f(x)\}$ es homeomorfo a A. . Como consecuencia, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$

7. Se considera el hemisferio superior H_n^+ de $\mathbb{S}^n$ y la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to H_n^+$ definida por

   $$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}\right).$$

   Probar que f es un homeomorfismo.

8. Probar que la aplicación $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es abierta. Estudiar si es cerrada.

9. Sea un embebimiento $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y un homeomorfismo $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau^{''})$. Probar que $g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau^{''})$ es un embebimiento.

10. Probar que $\mathbb{S}^m$ se embebe en $\mathbb{S}^n$ con $m \leq n$.

11. Se considera la aplicación $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ definida por por $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Probar que esta aplicación es cerrada pero no es abierta.

12. Se define la aplicación $f : [0, 1] \to \{0, 1\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Probar que f es una aplicación sobreyectiva, cerrada, abierta y no es continua.

13. Probar que $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios localmente homeomorfos.

14. Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es abierta o cerrada.

15. Sea $A \subset (X, \tau)$ y la aplicación inclusión $i : (A, \tau_{|A}) \to (X, \tau)$. Probar que i es abierta si y sólo si A es un conjunto abierto de X.

16. Probar que $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ es un homeomorfismo entre $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$.

17. Sean X e Y dos conjuntos, $p \in X$ e $q \in Y$. Se considera en ambos las correspondientes topologías del punto excluído, τ_p y τ_q (Ver Ejercicio 1.5.24). Probar que una aplicación $f : (X, \tau_p) \to (Y, \tau_q)$ es continua si y sólamente si $f(p) = q$ o f es constante.

18. Determinar un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

19. Probar que los conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

son homeomorfos

20. Probar que la esfera $\mathbb{S}^2$ es homemorfa al elipsoide

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

21. Probar que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es homeomorfo al hiperboloide reglado
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

22. Probar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos:
$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; s^2 \leq x^2 + y^2 \leq S^2\},$$
donde $0 < r < R < \infty$ y $0 < s < S < \infty$.

23. Obtener una expresión analítica de un homeomorfismo entre la corona circular $C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 < u^2 + v^2 < 4\}$ y el hiperboloide reglado H.

24. Calcular explícitamente un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

25. Demostrar que $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$ es homeomorfo a $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

26. Sea un conjunto X con dos distancias d_1, d_2. Probar que las distancias d_1 y d_2 son equivalentes si y sólo si la aplicación identidad $1_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

27. Se considera el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Estudiad cuántas topologías diferentes existen en X salvo homeomorfismos.