

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Introducción al Cálculo

Integral en Varias Variables

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Septiembre 2005

Ramón Bruzual

Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez

Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg>

Nota: Este material está disponible en la página web

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm>

En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la parte de Cálculo Integral en Varias Variables del curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Septiembre 2005.

CONTENIDO

Capítulo 1. Integrales dobles.	1
1. El caso de una dimensión.	1
2. Integrales dobles sobre rectángulos.	4
3. Integrales dobles sobre conjuntos más generales.	9
4. Cálculo de áreas y volúmenes usando integrales dobles.	16
5. Cambio de coordenadas cartesianas a polares.	18
6. Lectura adicional: Justificación de la fórmula del cambio de variables para coordenadas polares.	21
7. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.	22
Ejercicios.	
Integrales dobles.	25
Capítulo 2. Integrales triples.	29
1. Definiciones y resultados básicos.	29
2. Cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas.	31
3. Cambio de coordenadas cartesianas a esféricas.	32
4. Aplicación a cálculo de volúmenes.	34
Ejercicios.	
Integrales triples.	39
Capítulo 3. Lectura adicional: El teorema de Green.	41
Ejercicios.	
El teorema de Green.	45
Bibliografía	47
Índice	49

CAPÍTULO 1

Integrales dobles.

Integrales dobles de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a polares. Aplicación a cálculo de áreas. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1. El caso de una dimensión.

En esta sección recordaremos algunos resultados y definiciones relacionados con la integral de Riemann en una dimensión.

El enfoque usual de la integral de Riemann, es como sigue.

DEFINICIÓN 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b .

Los puntos de una partición pueden ser numerados como x_0, x_1, \dots, x_k , de forma tal que el conjunto quede ordenado de la siguiente manera

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Al hablar de una partición siempre supondremos que está ordenada de la forma anterior.

DEFINICIÓN 1.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ una partición del intervalo $[a, b]$.

Para $1 \leq i \leq n$, sean

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

La *suma inferior* de f correspondiente a P , se denotará por $L(f, P)$ y es

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

La *suma superior* de f correspondiente a P , se denotará por $U(f, P)$ y es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es importante notar que la hipótesis f acotada es esencial para poder garantizar que tanto M_i como m_i están definidos. También es necesario definirlos como supremo e ínfimo y no como máximos y mínimos, ya que f no se supone continua.

El siguiente dibujo nos ilustra la suma superior para la función $f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0, 10]$, con la partición $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

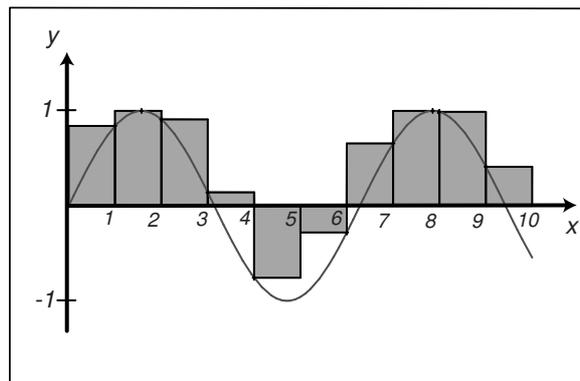


FIGURA 1.1. Suma superior para $f(x) = \sin x$

El siguiente dibujo nos ilustra la suma inferior para la función $f(x) = \sin x$ en el mismo intervalo $[0, 10]$, con la misma partición $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

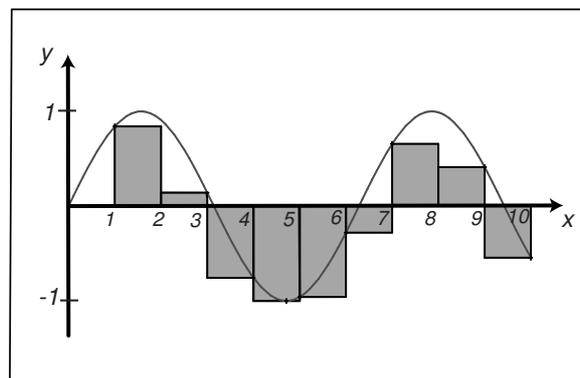


FIGURA 1.2. Suma inferior para $f(x) = \sin x$

Es importante notar que cada una de estas sumas representa el área algebraica de los rectángulos sombreados (área algebraica se refiere a lo siguiente: si el rectángulo está por encima del eje x , el área se toma como positiva, si está por debajo, se toma negativa).

DEFINICIÓN 1.3. Una función acotada f definida en $[a, b]$ es *integrable Riemann* o *integrable* sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de integral de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Si la función f es no negativa, la integral de f sobre $[a, b]$ representa el área de la región plana limitada por el gráfico de f , el eje x y las verticales $x = a$ y $x = b$.

Tenemos que si f es continua en $[a, b]$, salvo en una cantidad finita de puntos, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Además, para funciones continuas tenemos lo siguiente.

Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, la norma de P se define por

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}.$$

TEOREMA 1.4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$ y para cualquier conjunto de puntos $\{c_i\}$ tales que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

El resultado anterior se suele expresar de la siguiente manera:

Si f es continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Las sumas que aparecen en la fórmula anterior se conocen con el nombre de *sumas de Riemann de f* .

Es muy importante recordar el siguiente resultado, que establece una conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, y que es sumamente útil en el momento de calcular integrales.

TEOREMA 1.5 (Teorema fundamental del cálculo). *Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g , entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

2. Integrales dobles sobre rectángulos.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $Q = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo contenido en \mathbb{R}^2 . Sea P una colección de subrectángulos de Q . Se dice que P es una *partición* de Q si existen una partición $P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\}$ de $[a, b]$ y una partición $P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$ de $[c, d]$ tales que

$$P = \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] : 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2 \}.$$

El par (P_1, P_2) lo usaremos para denotar a P .

Notar que si P_1 divide el intervalo $[a, b]$ en N_1 intervalos y P_2 divide el intervalo $[c, d]$ en N_2 intervalos entonces P contiene $N_1 \cdot N_2$ subrectángulos.

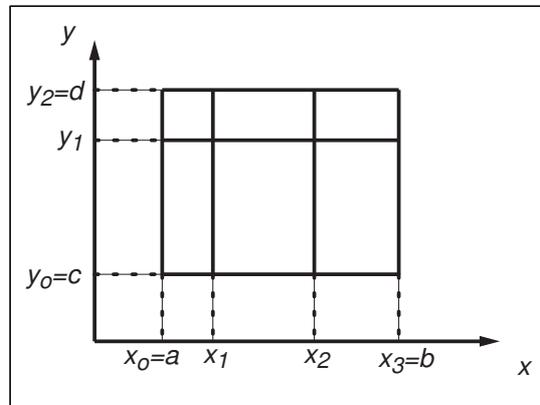


FIGURA 1.3. Partición de $[a, b] \times [c, d]$

Consideremos ahora una función acotada f definida en el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$. Sea $P = (P_1, P_2)$ una partición de Q donde

$$P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\} \quad P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$$

son particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente.

Para $1 \leq i \leq N_1$ y $1 \leq j \leq N_2$, sean

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

La *suma inferior* de f correspondiente a P , se denotará por $L(f, P)$ y es

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La *suma superior* de f correspondiente a P , se denotará por $U(f, P)$ y es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Es importante notar que la hipótesis f acotada es esencial para poder garantizar que tanto M_{ij} como m_{ij} están definidos.

DEFINICIÓN 1.7. Una función acotada f definida en Q es *integrable Riemann* o *integrable* sobre Q si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } Q\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } Q\}.$$

DEFINICIÓN 1.8. En caso de que f sea integrable el número común de la definición anterior recibe el nombre de *integral doble* de f sobre Q y se denota por

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy,$$

o simplemente por

$$\iint_Q f.$$

Al igual que en el caso unidimensional, tenemos que toda función continua en un rectángulo es integrable. Más generalmente se cumple lo siguiente: si f es acotada en un rectángulo y continua, salvo en un conjunto de “área nula”, entonces f es integrable sobre el rectángulo (los segmentos y las curvas lisas son ejemplos de conjuntos de área nula).

También se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 1.9. Sea $Q \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $P = (Q_{ij}) = (P_1, P_2)$ una partición de Q . Si $c_{ij} \in Q_{ij}$, entonces

$$\iint_Q f dV = \lim_{|P_1| \rightarrow 0, |P_2| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} f(c_{ij}) \text{Area}(Q_{ij}).$$

2.1. Interpretación geométrica de la integral doble.

Sea f una función continua y no negativa definida en el rectángulo Q .

Cada sumando de la forma

$$M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

que aparece en la suma superior $U(f, P)$ es el volumen de un paralelepípedo con base el rectángulo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y altura M_{ij} . Además, por definición, M_{ij} es el supremo de f en el rectángulo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

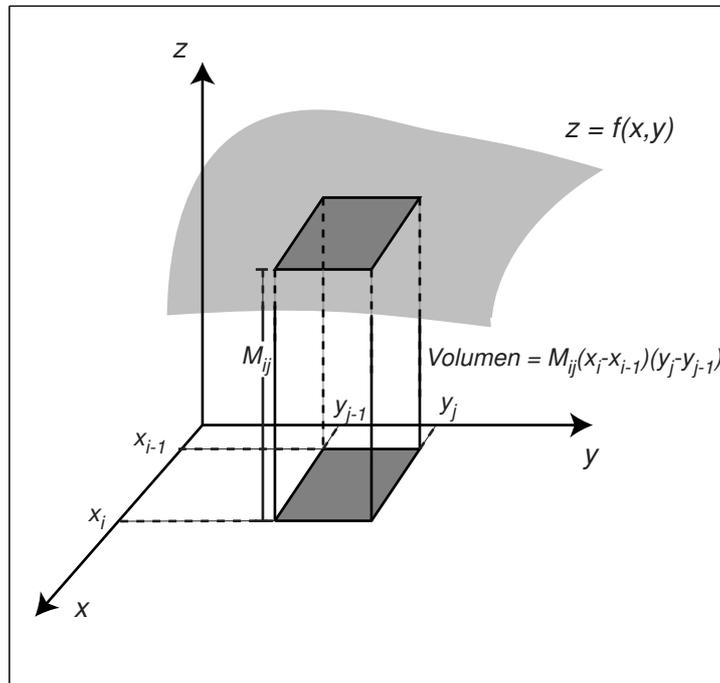


FIGURA 1.4.

Por lo tanto, la suma superior $U(f, P)$ es igual al volumen de un sólido, formado por paralelepípedos cuyas bases son los rectángulos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y cuyas alturas son M_{ij} , $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, \dots, N_2$.

De lo anterior concluimos que la suma superior es una aproximación por exceso del volumen del sólido dado por $0 \leq z \leq f(x, y)$, $(x, y) \in Q$.

De forma análoga tenemos que la suma inferior $L(f, P)$ es una aproximación por defecto del volumen del mismo del sólido $0 \leq z \leq f(x, y)$, $(x, y) \in Q$.

Por otra parte, por ser f integrable sobre Q , tenemos que $\iint_Q f$ es el único número real que está entre $U(f, P)$ y $L(f, P)$ para toda partición P de Q .

Luego, para una función continua y no negativa f , tenemos que

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy$$

es igual al volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

2.2. Cálculo de la integral doble mediante integración iterada.

Sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa.

El volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

lo podemos calcular integrando el área de su sección transversal. En la figura

$$A(x_o) = \int_c^d f(x_o, y) \, dy.$$

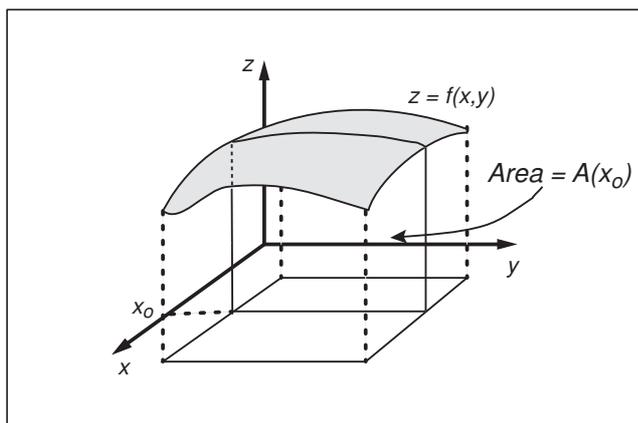


FIGURA 1.5.

De manera que si $Q = [a, b] \times [c, d]$, tenemos que

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

De manera análoga podemos ver que también

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

En general, si $Q = [a, b] \times [c, d]$ y f es una función continua entonces

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

OBSERVACIÓN 1.10. El resultado anterior se conoce como Teorema de Fubini . El resultado se cumple bajo ciertas condiciones más generales que las que hemos considerado y su justificación rigurosa está fuera del alcance de estas notas. Para más detalles ver [7].

EJEMPLO 1.11. Calcular

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y) \, dx dy.$$

$$\int_0^1 (x^2 + y) \, dx = \frac{x^3}{3} + yx \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy \\ &= \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

A manera de ejercicio, calcular la integral iterada en el otro orden y verificar que se obtiene el mismo resultado.

2.3. Propiedades de las integrales dobles en rectángulos.

Sea Q un rectángulo contenido en \mathbb{R}^2 entonces la integral sobre Q tiene las siguientes propiedades

- (1) Linealidad: Si f y g son dos funciones integrables sobre Q , si c_1, c_2 son números reales, entonces $c_1f + c_2g$ es integrable sobre Q y

$$\iint_Q (c_1f(x, y) + c_2g(x, y)) \, dx dy = c_1 \iint_Q f(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_Q g(x, y) \, dx dy.$$

- (2) Si f es una función integrable sobre Q y se tiene que $Q = Q_1 \cup Q_2$, donde Q_1 y Q_2 son rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenados, tales que $Q_1 \cap Q_2$ es un segmento de recta, entonces f es integrable sobre cada Q_i , $i = 1, 2$ y

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{Q_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{Q_2} f(x, y) \, dx dy.$$

- (3) Monotonía: Si f y g son funciones integrables sobre Q y $g(x, y) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Q$, entonces

$$\iint_Q g(x, y) \, dx dy \leq \iint_Q f(x, y) \, dx dy.$$

En particular, si $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in Q$, entonces

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy \geq 0.$$

3. Integrales dobles sobre conjuntos más generales.

En esta sección extenderemos el concepto de integral doble a conjuntos más generales que rectángulos y veremos cómo calcularlas.

Supongamos que tenemos una región acotada $R \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Sea $Q \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo tal que $R \subset Q$, definimos

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) \, dx dy,$$

donde

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in R, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in Q \setminus R. \end{cases}$$

A continuación veremos cómo calcular esta integral, dependiendo del tipo de región.

DEFINICIÓN 1.12. Una *región del tipo I* es una región de la forma

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a, b]$, tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

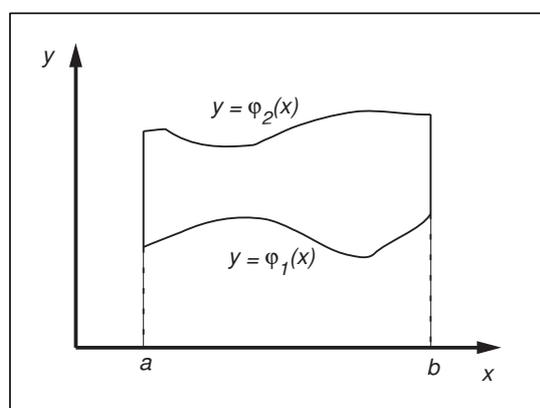


FIGURA 1.6. Región tipo I

Em este caso

$$\iint_{R_1} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

DEFINICIÓN 1.13. Una *región del tipo II* es una región de la forma

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c, d]$ tales que $\psi_1 \leq \psi_2$.

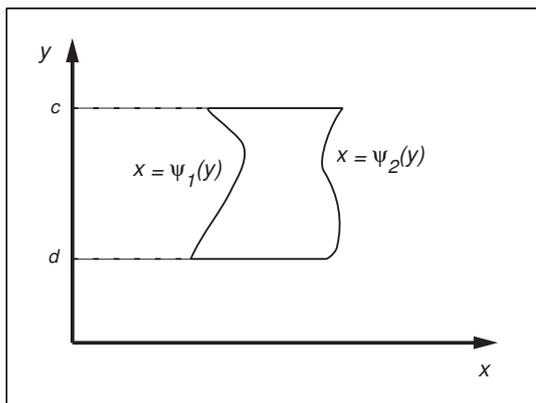


FIGURA 1.7. Región tipo II

En este caso

$$\int_{R_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

EJEMPLO 1.14. Sea R la región representada en la siguiente figura. Veamos cómo escribir

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

como una integral iterada.

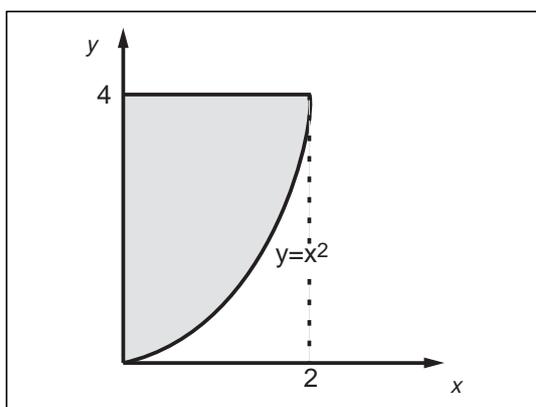


FIGURA 1.8.

La región de integración está dada por $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 4$, por lo tanto,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 f(x, y) dy \right) dx.$$

Notemos que otra manera de describir la región es $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, por lo tanto también tenemos que

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Finalmente, para calcular una integral sobre una región arbitraria, descomponemos la región como una unión de regiones tipo I y tipo II y sumamos las integrales sobre cada una de estas regiones.

OBSERVACIÓN 1.15. La siguiente notación es muy utilizada. En vez de escribir

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

se suele escribir

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

De igual manera se usa la notación análoga en el otro orden. Así que las expresiones

$$\int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

y

$$\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

tienen exactamente el mismo significado.

EJEMPLO 1.16. Sea R la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Escribir

$$\iint_R f dx dy$$

en términos de integrales iteradas.

R es la unión de cuatro regiones tipo I, que son

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}, \\
 R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}, \\
 R_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}\}, \\
 R_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.
 \end{aligned}$$

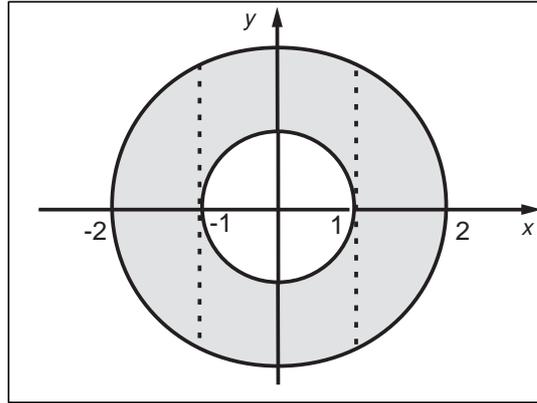


FIGURA 1.9.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \\
 &\quad + \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.17. Considerar la siguiente integral iterada

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx.$$

Identificar la región de integración, representarla gráficamente e intercambiar el orden de integración.

Tenemos que la región de integración está dada por

$$1 \leq y \leq e \quad 0 \leq x \leq \ln y$$

y gráficamente corresponde con la región sombreada en la siguiente figura.

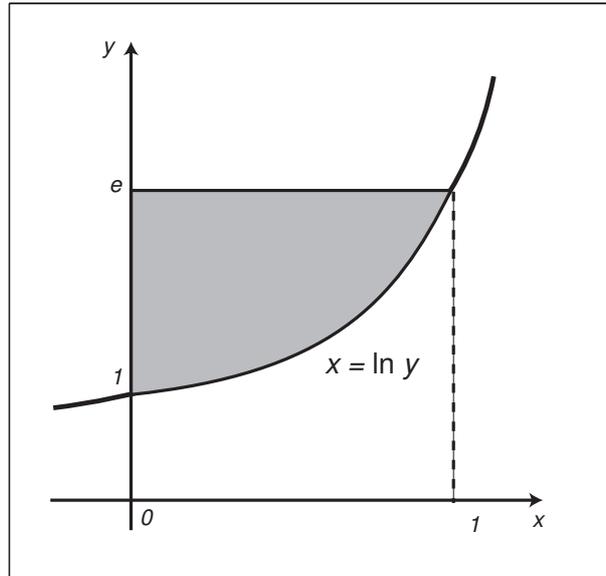


FIGURA 1.10. Región de integración

Para cambiar el orden de integración, notemos que la curva $x = \ln y$ es la misma curva que $y = e^x$, por lo tanto la región también la podemos expresar de la siguiente manera

$$0 \leq x \leq 1 \quad e^x \leq y \leq e.$$

Al cambiar el orden de integración obtenemos

$$\int_0^1 dx \int_{e^x}^e f(x, y) dy.$$

EJEMPLO 1.18. Sea R la región acotada del plano limitada por el gráfico de la función $y = |x|$ y la recta $3y = x + 4$. Representar gráficamente R y expresar $\iint_R f(x, y) dx dy$ en términos de integrales iteradas en ambos órdenes.

Para representar gráficamente la región trazamos el gráfico de la función $y = |x|$ y de la recta $3y = x + 4$. Los puntos de corte de las curvas son $(-1, 1)$ y $(2, 2)$. La región corresponde con el área sombreada en la siguiente figura.

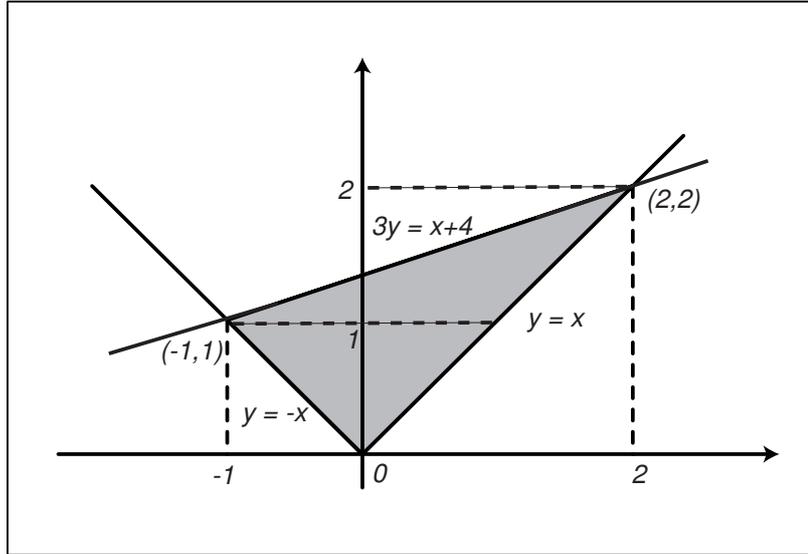


FIGURA 1.11. Región de integración

La región la podemos escribir de la siguiente manera

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq (x+4)/3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq (x+4)/3\},$$

por lo tanto $\iint_R f(x, y) dx dy$ es igual a

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{(x+4)/3} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_x^{(x+4)/3} f(x, y) dy.$$

Procedamos ahora con el otro orden. La región también la podemos escribir de la siguiente manera

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 3y - 4 \leq x \leq y\},$$

por lo tanto la integral también es igual a

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^y f(x, y) dx.$$

OBSERVACIÓN 1.19. Para regiones generales valen resultados análogos a los enunciados en la Subsección 2.3.

3.1. Lectura adicional: justificación de la definición de integral doble sobre regiones de tipo I y regiones de tipo II.

Sea R_1 la región de tipo I dada por

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Si

$$c = \inf\{\varphi_1(x) : a \leq x \leq b\}, \quad d = \sup\{\varphi_2(x) : a \leq x \leq b\}$$

entonces $R_1 \subset [a, b] \times [c, d]$.

Luego

$$\iint_{R_1} f(x, y) \, dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \tilde{f}(x, y) \, dx dy,$$

donde

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in R_1, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus R_1. \end{cases}$$

Por ser f continua tenemos que, para cada $x \in [a, b]$, la función $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$ es integrable sobre $[c, d]$ y de la definición de \tilde{f} sigue que

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Por el Teorema de Fubini

$$\iint_{R_1} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Para regiones de tipo II se hace un razonamiento análogo.

4. Cálculo de áreas y volúmenes usando integrales dobles.

Sea R una región contenida en \mathbb{R}^2 que es unión finita de regiones de tipo I y de tipo II. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, si $f \geq 0$ entonces

$$\iiint_R f$$

es el volumen de la región limitada por el gráfico de f y el plano xy , es decir el volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Si tomamos $f \equiv 1$ entonces el volumen de S es igual al área de R , por lo tanto el área de una región R del plano es igual a

$$\iint_R 1 \, dx \, dy.$$

EJEMPLO 1.20. Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El elipsoide es la región comprendida entre los gráficos de las funciones

$$f_1(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

para $(x, y) \in S$, donde

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto, denotando por V al volumen del sólido, tenemos que

$$V = \iint_S (f_1(x, y) - f_2(x, y)) \, dx \, dy.$$

Tomado en cuenta las simetrías del sólido tenemos que

$$V = 8c \iint_{S_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy,$$

donde

$$S_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto

$$V = 8c \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dy \right) dx.$$

Dejamos al lector verificar que la integral anterior es igual a

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

(ver Ejercicio 9).

Luego

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

5. Cambio de coordenadas cartesianas a polares.

Recordemos que el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas polares (r, θ) si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

En este caso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \theta = y/x.$$

Es usual suponer $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Más generalmente, se restringe θ a un intervalo semiabierto de longitud 2π .

Explícitamente

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

donde $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

TEOREMA 1.21 (Cambio de variables a Coordenadas Polares).

Sea $B \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ un conjunto acotado y sea

$$T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

la transformación de coordenadas polares.

Sea $T_P(B)$ la imagen de B por T_P y sea $f : T_P(B) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces

$$\iint_{T_P(B)} f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \, dr d\theta.$$

OBSERVACIÓN 1.22. El factor r que aparece en la integral de la derecha es $\det T'_P(r, \theta)$. En efecto, la matriz jacobiana para el cambio a coordenadas polares es:

$$T'_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\det T'_P(r, \theta) = r.$$

EJEMPLO 1.23. Calcular

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

donde

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sean $T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ y $B = [1, 2] \times [0, 2\pi]$, entonces

$$T_P(B) = R.$$

Luego

$$\begin{aligned} \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \iint_B \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} \, r \, dr d\theta \\ &= \iint_B r^2 \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \, dr = 2\pi \int_1^2 r^2 \, dr \\ &= 2\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=1}^{r=2} = \frac{2\pi}{3} (8 - 1) \\ &= \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.24. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano xy .

Debemos calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. ¿Por qué?

Sean $T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ y $B = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, entonces

$$T_P(B) = D.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy &= \iint_B ((r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2) \, r \, dr d\theta \\
 &= \iint_B r^3 \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = 2\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
 &= 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

A continuación damos el resultado general para el cambio de variables en integrales dobles.

TEOREMA 1.25 (Cambio de variables para integrales dobles).

Sea R_{uv} un subconjunto acotado del plano. Sean $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ funciones con derivadas parciales continuas y sea T la transformación definida por

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Sea $R_{xy} = T(R_{uv})$ y sea $f : R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, dudv$$

OBSERVACIÓN 1.26. El factor $|J(u, v)|$ que aparece en la integral de la derecha es el módulo de $J(u, v)$. Donde $J(u, v)$ es el siguiente determinante

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Es bueno saber que $J(u, v)$ también se designa con

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

6. Lectura adicional: Justificación de la fórmula del cambio de variables para coordenadas polares.

A continuación vamos a justificar, de manera intuitiva y usando argumentos geométricos sencillos, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares.

Tal como antes sea $T_P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Es un hecho básico de geometría (ver figura) que si $B_o = [0, q] \times [0, \alpha]$, donde $\alpha \in [0, \pi/2]$ y $q \geq 0$, entonces

$$\text{Area}(T_P(B_o)) = q^2 \frac{\alpha}{2}.$$

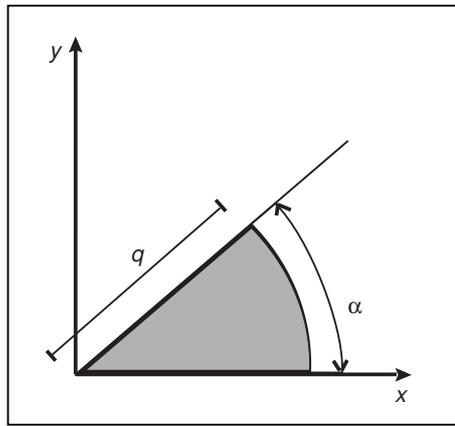


FIGURA 1.12. $T_P(B_o)$

PROPOSICIÓN 1.27. Si

$$B_1 = [q_1, q_2] \times [\alpha_1, \alpha_2],$$

donde $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2\pi$ y $0 \leq q_1 < q_2$, entonces

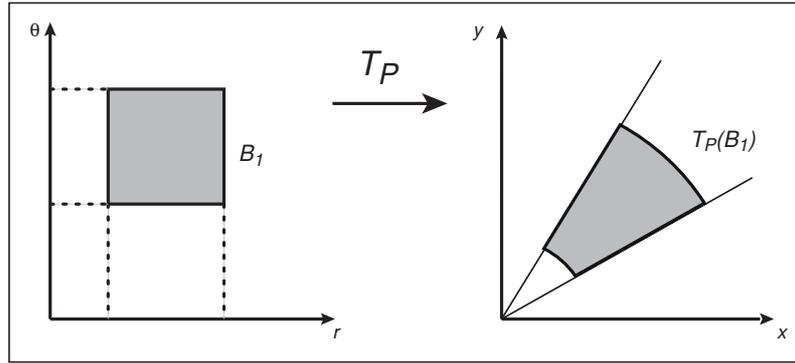
$$\text{Area}(T_P(B_1)) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Del comentario previo a esta Proposición podemos concluir que (ver figura)

$$\begin{aligned} \text{Area}(T_P(B_1)) &= q_2^2 \frac{\alpha_2}{2} - q_1^2 \frac{\alpha_1}{2} - (q_1^2 \frac{\alpha_2}{2} + q_2^2 \frac{\alpha_1}{2}) \\ &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}. \end{aligned}$$

□

FIGURA 1.13. $T_P(B_1)$

Consideremos ahora una región B en el plano $r\theta$. Supongamos $B \subset [a, b] \times [\gamma, \delta]$ y sea $T_P(B)$ la imagen de B por T_P .

Sean $P_1 = \{r_0, r_1, \dots, r_{n_1}\}$ una partición de $[a, b]$ y $P_2 = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n_2}\}$ una partición de $[\gamma, \delta]$.

Sean $B_{ij} = [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$ y $d_{ij} \in B_{ij}$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces basándonos en el Teorema 1.9 podemos justificar, de manera informal, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \iint_{T_P(B)} f(x, y) \, dx \, dy &= \lim_{(|P_1|, |P_2|) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij})) \text{Area}(T_P(B_{ij})) \\
 &= \lim_{(|P_1|, |P_2|) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij})) \frac{r_i + r_{i-1}}{2} (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1}) \\
 &= \iint_B f(T_P(r, \theta)) r \, dr \, d\theta \\
 &= \iint_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.
 \end{aligned}$$

7. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.

Lo haremos en dos partes.

PROPOSICIÓN 1.28.

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \frac{\pi}{4}.$$

DEMOSTRACIÓN.

En este caso la región de integración es el primer cuadrante.

Aunque se trata de una región no acotada, se puede dar una versión del teorema del cambio de variables para coordenadas polares.

Aplicando este resultado se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Pero

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

□

PROPOSICIÓN 1.29.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$a = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Por supuesto que

$$a = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

y así tenemos que

$$a^2 = a \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} a dy.$$

Pero

$$e^{-y^2} a = e^{-y^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx.$$

De donde

$$a^2 = a \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Usando la Proposición 1.28 tenemos que

$$a^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Luego

$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

OBSERVACIÓN 1.30. Del cálculo anterior también se concluye que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ejercicios.
Integrales dobles.

(1) Calcular las integrales iteradas que se indican, representar gráficamente la región de integración y describirla utilizando notación conjuntista.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_1^4 dy \int_2^5 (x^2 - y^2 + xy - 3) dx, & \text{(f)} \int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 - xy) dy \right) dx, \\
 \text{(b)} \int_0^2 dx \int_{-3}^2 (x^3 + 2x^2y - y^3 + xy) dy, & \text{(g)} \int_2^3 \left(\int_{1+y}^{\sqrt{y}} (x^2y + xy^2) dy \right) dx, \\
 \text{(c)} \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2xy - 3y^2) dy, & \text{(h)} \int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{18-2y^2}}^{\sqrt{18-2y^2}} x dx, \\
 \text{(d)} \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 + 2xy - 3y^2) dy, & \text{(i)} \int_{-3}^3 dx \int_{x^2}^{18-x^2} xy^3 dy, \\
 \text{(e)} \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) dy \right) dx, & \text{(j)} \int_1^2 dx \int_{x^3}^{4x^3} \frac{1}{y} dy.
 \end{array}$$

(2) Calcular la integral doble indicada y representar gráficamente la región R .

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy, & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}, \\
 \text{(b)} \iint_R x \cos y dx dy, & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}, 0 \leq y \leq x^2\}, \\
 \text{(c)} \iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq x\}, \\
 \text{(d)} \iint_R \ln y dx dy, & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x - 1\}, \\
 \text{(e)} \iint_R \frac{1}{y^2} e^{(x/\sqrt{y})} dx dy, & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq 2\}. \\
 \text{(f)} \iint_R xy dx dy, & R \text{ es la región limitada por las curvas } y = x \text{ e } y = x^2.
 \end{array}$$

(3) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

- (4) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^3$.
- (5) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = 0$, $z = x$, $y^2 = 2 - x$.
- (6) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $x + y + z = 3$.
- (7) Deducir la fórmula para el volumen de un cono recto de base circular, cuya base tiene radio R y cuya altura es h .
- (8) En cada uno de los siguientes problemas calcular la integral iterada dada, expresándola primero como una integral doble y pasando luego a coordenadas polares. ¿Se simplifican los cálculos en todos los casos?

$$(a) \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx,$$

$$(e) \int_0^2 \left(\int_0^x (x^2 + y^2) dy \right) dx,$$

$$(b) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx,$$

$$(f) \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \text{sen}(x^2 + y^2) dx.$$

$$(c) \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy,$$

$$(g) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy dx.$$

$$(d) \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dy \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \text{sen}(x^2 + y^2) dx,$$

$$(h) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx.$$

- (9) El propósito del siguiente ejercicio es calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El primer paso es notar que el elipsoide es la región comprendida entre los gráficos de las funciones

$$f_1(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

para $(x, y) \in S$, donde

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto, denotando por V al volumen del sólido, tenemos que

$$V = \iint_S (f_1(x, y) - f_2(x, y)) \, dx dy = 2c \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx dy.$$

(a) Introducir coordenadas polares generalizadas

$$T_{PG}(r, \theta) = (ar \cos \theta, br \sin \theta).$$

Demostrar que el determinante jacobiano de esta transformación es igual a

$$abr$$

y que

$$S = T_{PG}(B),$$

donde $B = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

(b) Utilizar la fórmula del cambio de variables para integrales dobles para concluir que

$$V = 2c \iint_B abr \sqrt{1 - r^2} \, dr d\theta.$$

(c) Finalmente, calcular la integral anterior para obtener

$$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

(10) Utilizar el cambio a coordenadas polares para hallar el volumen del sólido formado por los puntos que están por encima del cono $z = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(11) Utilizar el cambio a coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

CAPÍTULO 2

Integrales triples.

Integrales triples de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas. Aplicación a cálculo de volúmenes.

1. Definiciones y resultados básicos.

La integral triple se define de manera análoga a la doble.

Consideramos un paralelepípedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_2, b_3]$ contenido en \mathbb{R}^3 y una función $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Una partición $P = \{Q_{ijk}\}$ de Q estará dada por tres particiones P_1, P_2 y P_3 de $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_2, b_3]$ respectivamente.

Las definiciones y los resultados son completamente análogos, cambiando de manera adecuada y donde corresponda, rectángulo por paralelepípedo.

De manera análoga al caso bi-dimensional, podemos calcular integrales triples sobre regiones generales.

Por ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a, b]$ siendo $\varphi_1 \leq \varphi_2$, α_1 y α_2 son funciones continuas con $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Si f es integrable en R entonces

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \end{aligned}$$

Otro ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq z \leq h_2(y), \beta_1(y, z) \leq x \leq \beta_2(y, z)\}$$

entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dz \int_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx.$$

Una región arbitraria debe descomponerse en la unión de regiones análogas a las anteriores para poder así colocar los límites de integración.

EJEMPLO 2.1. Sea R el sólido limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z = 1$. Escribir

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz$$

como una integral iterada.

La representación gráfica de R es la siguiente.

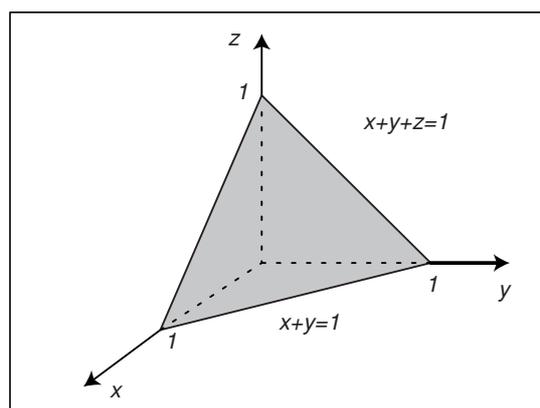


FIGURA 2.1. Sólido R

Tenemos que

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Por lo tanto

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

OBSERVACIÓN 2.2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

representa la masa de un sólido que ocupa la región R y cuya densidad en cada punto es f .

Si tomamos $f \equiv 1$ obtenemos que

$$\iiint_R dx \, dy \, dz$$

es igual al volumen de R .

2. Cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Recordemos que el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

es decir, representamos la primera y la segunda coordenada en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera.

En general se toma $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Además

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Sea

$$T_C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

la transformación de coordenadas cilíndricas, entonces su jacobiano es:

$$T'_C(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\det T'_C(r, \theta, z) = r$.

Del teorema general de cambio de variables obtenemos.

TEOREMA 2.3 (Cambio de variables a Coordenadas Cilíndricas).

Sean $B \subset \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ acotado, $T_C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$ y $f : T_C(B) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces

$$\iiint_{T_C(B)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz.$$

EJEMPLO 2.4. Sea S el sólido dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar

$$\iiint_S z dx dy dz.$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_S z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^r r z dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=r} \right) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2} dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Cambio de coordenadas cartesianas a esféricas.

Recordemos que el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) si

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

En general se toma

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Además,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

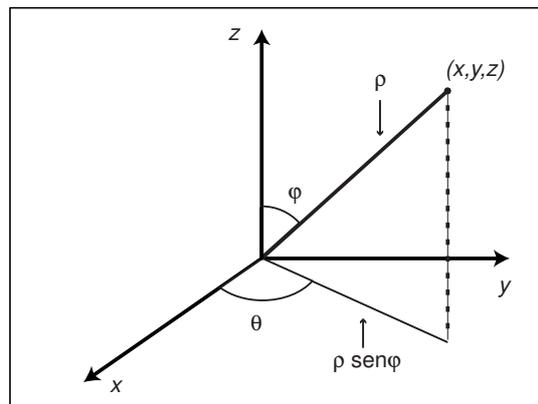


FIGURA 2.2. Coordenadas esféricas

Sea

$$T_E(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi).$$

El jacobiano para el cambio a coordenadas esféricas es:

$$T'_E(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}$$

Luego $\det T'_E(\rho, \theta, \varphi) = -\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$. Y así

$$|\det T'_E(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

TEOREMA 2.5 (Cambio de variables a Coordenadas Esféricas).

Sean

$$B \subset \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

acotado, $T_E(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$ y $f : T_E(B) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, entonces

$$\iiint_{T_E(B)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

EJEMPLO 2.6. Sea D la esfera de radio a y centro $(0, 0, 0)$, hallar el volumen de D .

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} (-\cos \pi + \cos 0) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

4. Aplicación a cálculo de volúmenes.

EJEMPLO 2.7. Calcular el volumen del sólido R limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

Ya en el ejemplo 2.1 vimos cómo colocar los límites de integración para la región R . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \iiint_R dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

por otra parte

$$\int_0^{1-x} (1-x-y) dy = (1-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} = (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2},$$

de donde

$$\text{Vol}(R) = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 2.8. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z = x^2 \quad \text{y} \quad z = 4 - x^2 - y^2.$$

Veamos primero el gráfico de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

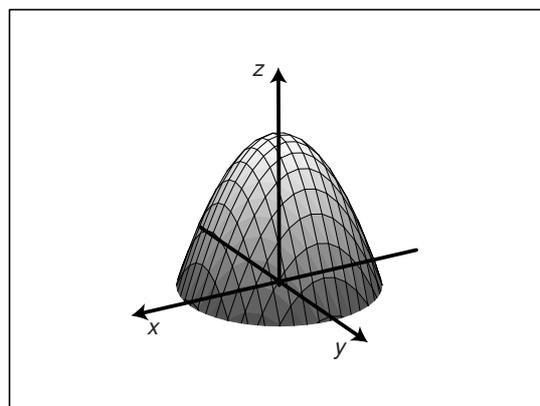
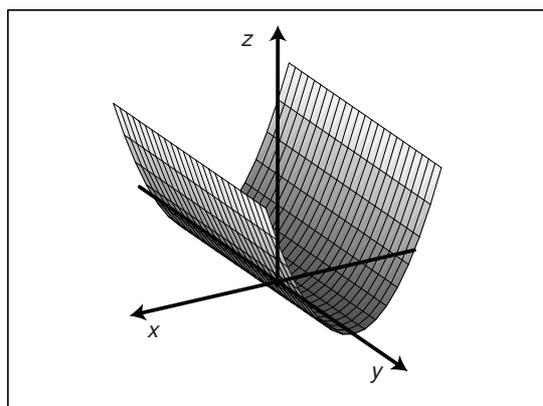


FIGURA 2.3. Gráfico de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

Al colocar las dos superficies juntas obtenemos lo siguiente

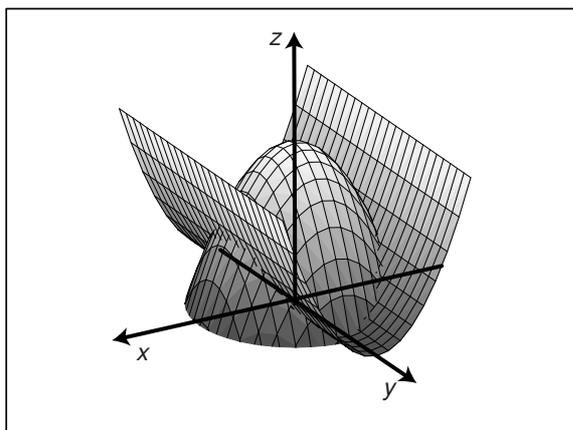


FIGURA 2.4.

De este gráfico ya podemos concluir que, en nuestra región, $x^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Nos falta hallar el conjunto donde varía (x, y) . Para esto debemos hallar la intersección de las dos superficies y proyectar sobre el plano xy . En las siguientes figuras hemos ido rotando las superficies, de manera que en la última las vemos desde arriba; se observa que la intersección de las superficies proyecta una curva con forma de elipse, sobre el plano xy .

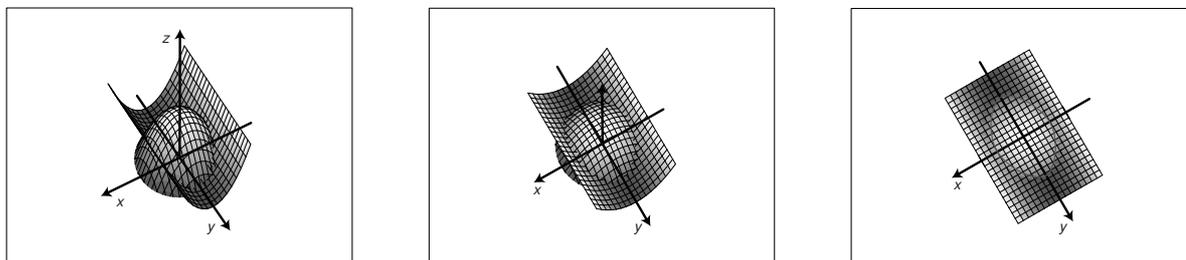


FIGURA 2.5. Intersección de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

Para hallar la proyección de la intersección de las dos superficies sobre el plano xy igualamos las ecuaciones que definen ambas superficies y obtenemos

$$x^2 = 4 - x^2 - y^2,$$

es decir

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse, centrada en el origen y con semiejes de longitud $\sqrt{2}$ y 2 respectivamente.

La representación gráfica de esta elipse es la siguiente,

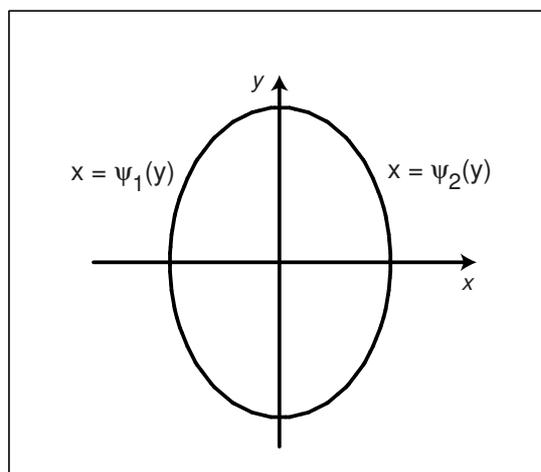


FIGURA 2.6. Elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

donde

$$\psi_1(y) = -\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto nuestro sólido está dado por

$$\begin{aligned} x^2 &\leq z \leq 4 - x^2 - y^2, \\ -\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}} &\leq x \leq \frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}, \\ -2 &\leq y \leq 2. \end{aligned}$$

El volumen del sólido será igual a (los detalles de los cálculos se los dejamos al lector)

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}^{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2-y^2} dz \\
&= \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}^{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}} (4 - 2x^2 - y^2) dx \\
&= \int_{-2}^2 \frac{2\sqrt{2}}{3} (4 - y^2)^{3/2} dy = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^2 (4 - y^2)^{3/2} dy \\
&= \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} + \left[\frac{16\sqrt{2}}{3} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4\theta) d\theta \\
&= 4\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.9. Calcular el volumen del sólido S que está encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

Este cono está dado por $\varphi = \pi/4$ y la ecuación de la esfera dada es

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

es decir tiene centro $(0, 0, a)$ y radio a .

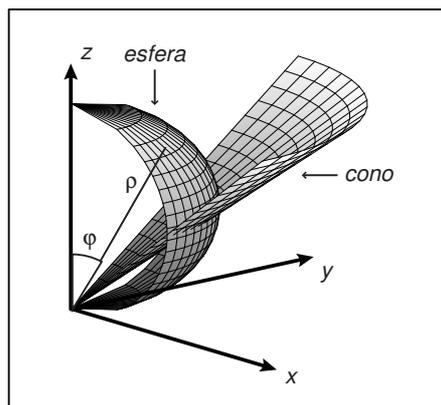
Sea (x, y, z) un punto de la esfera, entonces

$$\begin{aligned}
a^2 &= x^2 + y^2 + (z - a)^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 \\
&= \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
&= \rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
&= \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
&= \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2a\rho \cos \varphi + a^2 \\
&= \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi + a^2.
\end{aligned}$$

Luego $\rho^2 = 2a\rho \cos \varphi$ y por lo tanto

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Cómo los puntos de S están por encima del cono tenemos que $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ y cómo están dentro de la esfera tenemos que $0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$.

FIGURA 2.7. Corte de las superficies que limitan a S

Por lo tanto S está dado por $0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Utilizando el cambio a coordenadas esféricas obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(R) &= \iiint_S dx dy dz \\
 &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho d\theta \right) \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{8a^3}{3} \cos^3 \varphi \, d\theta \right) \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi.
 \end{aligned}$$

el resto de los cálculos se los dejamos al lector.

Ejercicios.
Integrales triples.

- (1) Calcular las integrales iteradas que se indican, expresar la región de integración en notación conjuntista y dar una idea de cómo luce la región de integración en \mathbb{R}^3 .

$$(a) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} x dz,$$

$$(b) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-y^2} \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2y^2 \sqrt{x} dz \right) dx \right) dy,$$

$$(c) \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} (x+y+z) dz,$$

- (2) Calcular

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz,$$

donde S está limitada por las superficies indicadas y f es la función dada.

$$(a) z = 0, y = 0, y = x, x + y = 2, x + y + z = 3; f(x, y, z) = x,$$

$$(b) x = 0, x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}; f(x, y, z) = y,$$

$$(c) x^2 + z^2 = 4, y = 0, y = 4; f(x, y, z) = z.$$

$$(d) x^2 + y^2 + z^2 = 9; f(x, y, z) = z.$$

- (3) Expresar la integral iterada

$$\int_0^2 dz \int_0^z dx \int_0^x f(x, y, z) dy$$

en los otros cinco órdenes posibles.

- (4) Calcular

$$\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

(5) Calcular

$$\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz,$$

donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}.$$

(6) ★ Calcular

$$\iiint_S \sqrt{y^2 + z^2} \, dx dy dz,$$

donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 16, -1 \leq x \leq 1\}.$$

CAPÍTULO 3

Lectura adicional: El teorema de Green.

Este capítulo es una introducción al teorema de Green que es, en cierto sentido, similar al Teorema Fundamental del Cálculo.

Comenzaremos definiendo lo que llamaremos región simple.

Recordemos que una región del tipo I es una región de la forma

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a, b]$, tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ y que una región del tipo II es una región de la forma

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c, d]$ tales que $\psi_1 \leq \psi_2$.

DEFINICIÓN 3.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ decimos que D es una *región simple* si D es una región tanto de tipo I como de tipo II y además ∂D es una curva lisa a trozos.

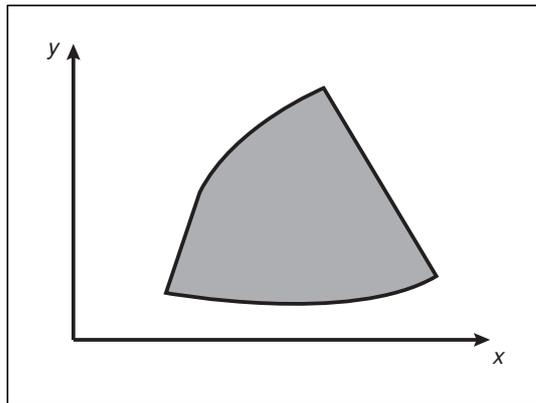


FIGURA 3.1. Región simple

DEFINICIÓN 3.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Decimos que ∂D está positivamente orientada con respecto a D si al “caminar” por ∂D con esa orientación, la región D queda a la izquierda de ∂D .

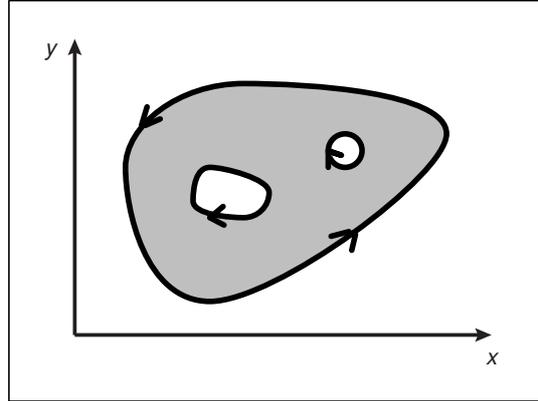


FIGURA 3.2. ∂D positivamente orientada con respecto a D

TEOREMA 3.3 (Green). Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ acotado y unión finita de regiones simples. Sean P y Q campos escalares de clase C^1 en un abierto que contiene a D . Entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

donde ∂D está orientada positivamente con respecto a D .

OBSERVACIÓN 3.4. Tal como es natural, la integral sobre dos curvas disjuntas se define como la suma de las integrales sobre cada una de las curvas.

EJEMPLO 3.5.

- (a) Sea G la circunferencia de centro en el origen y radio 1, recorrida en sentido antihorario y sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calcular

$$\int_G y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy.$$

Por el teorema de Green, tenemos que esta integral de línea es igual a

$$\iint_D (\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy) - \cos(xy) + xy \operatorname{sen}(xy)) dx dy = 0.$$

- (b) Calcular

$$\int_G (-y + 1) dx + x dy$$

donde G es la curva orientada positivamente que limita el triángulo τ de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

Aplicamos el teorema de Green con $P(x, y) = -y + 1$, $Q(x, y) = x$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Luego

$$\int_G (-y + 1) dx + x dy = \iint_{\tau} (1 + 1) dx dy = 2\text{Area}(\tau) = 1.$$

(c) Calcular

$$\frac{1}{2} \int_G -y dx + x dy$$

donde G es la circunferencia de centro el origen y radio 1 recorrida en sentido antihorario.

Sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G -y dx + x dy &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - (-1)) dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy \\ &= \text{Area}(D) = \pi. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea D una región simple de \mathbb{R}^2 cuya frontera ∂D es una curva lisa a trozos. Si ∂D está positivamente orientada con respecto a D , entonces el área de D es*

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy.$$

La demostración de esta Proposición queda como ejercicio. Sugerencia: Utilizar el teorema de Green.

EJEMPLO 3.7. Calcular el área de la región D limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sea $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Entonces

$$g'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t).$$

Luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y \, dx + x \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \operatorname{sen} t(-a \operatorname{sen} t) + a \cos t b \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Ejercicios.**El teorema de Green.**

- (1) Comprobar, calculando las integrales correspondientes, el teorema de Green para

$$\int_G (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy,$$

donde G es un cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$.

- (2) Hallar el área encerrada por la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

donde a es una constante positiva. (Sugerencia: la curva se puede parametrizar de la siguiente manera $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

- (3) Calcular

$$\int_G x dx + y dy,$$

donde G es un cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ y $(0, 4)$, recorrido en sentido antihorario.

- (4) Calcular

$$\int_G y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy,$$

donde G es una circunferencia con centro en $(1, 3)$ y radio 5, recorrida en sentido horario.

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. *Calculus Volumen 1*. Editorial Reverté.
- [2] APOSTOL, T. *Calculus Volumen 2*. Editorial Reverté.
- [3] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos*. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [4] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo diferencial en una variable*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [5] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo integral en una variable*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [6] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo diferencial en varias variables*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [7] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo integral en varias variables*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 8
- [8] DEMINOVICH, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo.
- [9] MARSDEN, J. Y TROMBA, A. *Cálculo Vectorial* Fondo Educativo Interamericano. Addison-Wesley.
- [10] MIRANDA, GUILLERMO *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.
- [11] PROTTER, M. H. AND MORREY, C. B. *A First Course in Real Analysis*.
- [12] QUINTANA, Y. *Guía de problemas de Matemática III*. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [13] SWOKOWSKY, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- [14] WILLIAMSON, CROWELL, TROTTER. *Cálculo de Funciones Vectoriales*. Editorial Prentice/Hall Internacional.

Índice

cambio de variables, 20

coordenadas

 cíndricas, 31

 esféricas, 32

 polares, 18, 21

Fubini, teorema, 8

Green, teorema de, 42

integrable, 3, 5

integral, 3

 doble, 5

 triple, 29

partición, 1, 4

región simple, 41

región tipo I, 10

región tipo II, 10

suma inferior, 1, 5

suma superior, 2, 5

sumas de Riemann, 3

teorema fundamental del cálculo, 4