

Problemas de Optimización - MA2A1

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Pruebe que si f tiene un máximo local en x_0 entonces la matriz Hessiana $H_f(x_0)$ es semi-definida negativa.
2. Pruebe que una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 cuyo laplaciano:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

es positivo $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no puede tener un máximo local.

Indicación: Razone por contradicción y recuerde que la traza de una matriz es la suma de sus v.p.

3. Resuelva sin utilizar Multiplicadores de Lagrange:
 Considere un paralelepípedo recto P en $\mathbb{R}^3$ cuya superficie (la suma del área de las 6 caras) es igual a 6, además suponga que todas sus caras tienen área positiva. El objetivo del problema es que encuentre el máximo volumen posible que puede tener el paralelepípedo, para ello:

- a) Plantee el problema como un problema de maximización en tres variables (x, y, z) , indicando la función objetivo $f_0(x, y, z)$ y el conjunto de restricciones Q_0 .
- b) Reduzca el problema a uno de maximización en dos variables (x, y) , indicando la función objetivo $f(x, y)$ y el conjunto de restricciones de restricciones Q , es abierto Q ? Haga un bosquejo de Q .
- c) Encuentre el único punto crítico (x_0, y_0) del interior Q y demuestre que cumple las siguientes ecuaciones:

$$3 - x^2 - 2xy = 0 \quad (1)$$

$$3 - y^2 - 2yx = 0 \quad (2)$$

- d) Pruebe que el punto crítico es máximo local estricto y además verifica que $\det(H_f(x_0, y_0)) = \frac{3}{4}$
- e) Pruebe que $f(x, y) < \frac{1}{2} \forall (x, y) \in Q \cap \{(x, y) : x \geq 20\}$
indicación: Pruebe que se tienen las siguientes desigualdades: $0 < xy < 3$ y $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{20}$ si $x \geq 20$ e $y > 0$
- f) Concluya que el pto. crítico del item 4 es máximo global estricto.

4. Resuelva utilizando Multiplicadores de Lagrange:

Encontrar un pto. P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

indicación: La fórmula para calcular el volumen de un tetraedro a partir de las coordenadas cartesianas de tres de sus vértices A, B y C (suponiendo el origen de coordenadas el cuarto) es:

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{bmatrix}$$

Además recuerde que la ecuación del plano tangente a la elipsoide en un pto. $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Si demuestra la fórmula anterior se le dará **1 punto** en su peor pregunta siendo el máximo posible un 7 en dicha pregunta.

5. Sea P_2 el espacio vectorial de los polinomios a valores reales de grado menor igual a 2. Consideremos la función $J : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

Sea $Q = \{f \in P_2 : f(1) = 1\}$. Se sabe que J alcanza un mínimo sobre Q .

Nuestro objetivo es encontrar dicho mínimo, para ello proceda de la siguiente forma:

- Sea $f(x) \in P_2$, es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(a, b, c) = J(f)$. Además pruebe que $f \in Q$ si y solo si $a + b + c = 1$.
- Resuelva el problema $\min G(a, b, c)$ s.a. $a + b + c = 1$
- Encuentre $f^* \in P_2$ tal que $J(f^*) \leq J(f) \forall f \in P_2$. Concluya.

6. Sea $\{\vec{X}^1, \vec{X}^2, \dots, \vec{X}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (m vectores fijos en $\mathbb{R}^n$), sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^m \left\| \vec{X} - \vec{X}^i \right\|_2^2$$

Encuentre y clasifique los puntos críticos de f . Determine mínimos y máximos si es que existen.

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ y σ son parámetros tales que $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de números reales dados. Se define $L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$.

Encuentre el máximo valor que puede tomar L .

8. Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$ en $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para ello estudie que sucede en $\text{int}(D)$ y en ∂D . Encuentre una buena parametrización para ∂D .
9. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Este conjunto se conoce con el nombre de elipsoide. Determine las mínimas y las máximas distancias al origen. Encuentre además el paralelogramo de mayor volumen que puede estar dentro de S cuyos ejes sean paralelos a los de la elipsoide.
10. Resuelva los siguientes problemas:
- $\min x + y + z^2$ en $A = \{(x, y, z) : x = 1, x^2 + y^2 = 1\}$
 - $\min x^2 + y^2 + z^2$ en $A = \{(x, y, z) : xy = 4b, x + 2z = 0\}$
 - $\min x^4 + y^4 + z^4$ en $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
11. a) Calcular el valor máximo de $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle$ s.a. $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$
b) Con esto demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwartz : $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$
12. Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos para las siguientes funciones y determine si esta función tiene un mínimo global:
- $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$
 - $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$

13. Determinar las ecuaciones del multiplicador de Lagrange para el punto del elipsoide de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz = 11$$

en el cual la función $f(x, y, z) = x + y - 2z$ se maximiza.

Determine dicho punto y el valor del multiplicador.

14. Calcular el mínimo relativo de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionado a que

$$2x + y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - y - 3z = 4 \quad (4)$$

De una interpretación geométrica.

15. Considere $f(x, y) = (x - y)^n$ con $n \geq 1$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$. Determine todos sus puntos críticos y clasifíquelos.

Indicación: Encuentre una buena parametrización del conjunto de restricción.

16. Encuentre y dibuje los puntos en el plano (a, b) tales que la función:

$$f_{a,b}(x, y) = ay^2 + bx$$

restringida al círculo $x^2 + y^2 = 1$, tiene exactamente dos y cuatro puntos críticos respectivamente. Clasifíquelos.

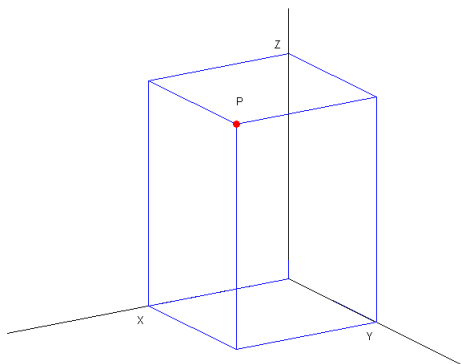
Indicación: Encuentre una buena parametrización del conjunto de restricción.

17. Resuelva:

$$\text{máx} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sin\left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{Sujeto a } x + y + z = \pi$$

18. Una caja rectangular está situada en el primer octante como se muestra en la figura, con una de sus esquinas en el origen y con las tres caras adyacentes a los planos formados por los ejes coordenados. El punto opuesto $P = (x, y, z)$ está restringido a la superficie del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$. Determine las coordenadas de P para que la caja sea de volumen máximo, para ello:

- Pruebe que el problema se puede escribir como maximizar $f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$, y determine los puntos críticos de f que caen en el primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$). Además determine la naturaleza de dicho(s) punto(s) crítico(s). Determine P .
- En vez de sustituir z , uno también podría utilizar Multiplicadores de Lagrange para maximizar el volumen $V = xyz$ con la misma restricción. Resuelva y compare su solución anterior.



19. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una muestra aleatoria (muestra sacada de una población con igual probabilidad de selección) con $x \geq 0$. Se define:

$$f(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i}$$

Resolver $\max f(\theta)$

20. Encontrar $x_1, \dots, x_n > 0$ que resuelven

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{array}$$

21. Hallar el punto en la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - z = 1$ más cercano al origen

22. Sean p, q dos números reales tales que $p > 1$, $q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- a) Encuentre el valor mínimo para $f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ bajo la restricción $x \cdot y = 1$ y $0 \leq x, 0 \leq y$.
b) A partir de (a) demuestre que si a y b son dos números no negativos, entonces: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

23. Sea $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

- a) Encuentre los puntos críticos de f
b) Considere el problema $\max f(x, y)$ sujeto a $(x, y) \in Q$ en que:
 $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$
Encuentre la (o las) solución.

24. Sean x, y, z, u, v, w seis números positivos (estrictamente) tales que:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1(*)$$

Muestre que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{u + v + w}$

Indicación: Minimizar $u + v + w$ s.a. (*) considerando (x, y, z) como parámetros fijos.

25. Calcular los extremos de $f(x, y) = 2x + y^2$ sobre $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y^2 - x \geq 0\}$
26. Considere un punto cualquiera $P = (x_0, y_0)$ y una recta cualquiera $L : ax + by + c = 0$, en que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Sin usar multiplicadores de Lagrange, pruebe que la distancia del punto a la recta L es:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

27. Para cada valor del escalar β , encuentre el conjunto de puntos críticos de la siguiente función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

Cuáles de estos puntos críticos son mínimos globales?