MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta Control 3

Miércoles 14 de Julio de 2010

P1. Sea Q la región contenida dentro del elipsoide de revolución cuya ecuación en cordenadas cartesianas es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Se define el sistema de coordenadas elípticas (r,θ,ϕ) mediante la transformación dada por

$$\begin{aligned} x &= ar\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y &= br\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z &= cr\cos\phi \end{aligned}$$

a) **(2 ptos)** Calcule los intervalos de variación de (r,θ,ϕ) para la región Q y el jacobiano de la transformación.

En este nuevo sistema de coordenadas, la región Q del sistema cartesiano está determinada por la región Q^* correspondiente a

$$Q^*=\{(r,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 : r\in[0,1],\theta\in[0,2\pi],\phi\in[0,\pi]\}$$

La transformación asociada al nuevo sistema corresponde a la función $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar\operatorname{sen}\phi\cos\theta\\ br\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\\ cr\cos\phi\end{pmatrix}$$

El jacobiano de T es:

$$J_T(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} a\operatorname{sen}\phi\cos\theta & -ar\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & ar\cos\theta\cos\phi\\ b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & br\operatorname{sen}\phi\cos\theta & br\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\ c\cos\phi & 0 & -cr\operatorname{sen}\phi\end{pmatrix}$$

y por lo tanto el determinante del jacobiano de la transformación es:

$$|J_T(r,\theta,\phi)|=abcr^2\operatorname{sen}\phi$$

b) **(4 ptos)** Usando el cambio a coordenadas elípticas calcule la siguiente integral:

$$\int\int\int_Q\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^3}dxdydz$$

Salvo un conjunto de medida nula, podemos describir la región Q mediante

$$int(Q^*)=\{(r,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 : r\in(0,1),\theta\in(0,2\pi),\phi\in(0,\pi)\}$$

el cual es un conjunto abierto, y $T(Q^*)=int(Q)$, que es abierto también. Dado que $|J_T(r,\theta,\phi)|\neq 0$, para todo $(r,\theta,\phi)\in int(Q^*)$, en virtud del teorema de cambio de variables se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_Q \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^3}dxdydz &= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}abcr^2\operatorname{sen}\phi d\theta d\phi dr \\
&= 4\pi abc\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r^2dr
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable $r=\operatorname{sen}\alpha$, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r^2dr &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha\operatorname{sen}^2\alpha d\alpha \\
&= \frac{\pi}{32}
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto

$$
\int\int\int_Q \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^3}dxdydz = \frac{abc\pi^2}{8}
$$

P2. *a)* Dada una densidad de masa $\rho(x,y,z)$ en unidades de masa por volumen, para el sólido E, se define su masa como

$$
m=\int\int\int_E \rho(x,y,z)\ dV
$$

y sus momentos alrededor de los tres planos de coordenadas son

$$
M_{yz}=\int\int\int_E x\rho(x,y,z)\ dV;\quad M_{xz}=\int\int\int_E y\rho(x,y,z)\ dV;\quad M_{xy}=\int\int\int_E z\rho(x,y,z)\ dV.
$$

El centro de masa está ubicado en el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, donde

$$
\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m};\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m};\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}.
$$

Encuentre el centro de masa de un sólido de densidad constante que está limitado por el cilindro parabólico $x=y^2$ y los planos $x=z$, $z=0$ y $x=1$.

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_0^x kdzdydx \\
&= k\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xdydx \\
&= k\int_0^1 2x\sqrt{x}dx \\
&= 2k\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{4k}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m}\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_0^x kxdzdydx \\
&= \frac{k}{m}\int_0^1 2x^2\sqrt{x}dx \\
&= \frac{2k}{m}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx \\
&= \frac{5}{7} \\
\bar{y} &= 0 \text{ (por simetría)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{m}\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_0^x kzdzdydx \\
&= \frac{k}{m}\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx \\
&= \frac{k}{m}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx \\
&= \frac{5}{14}
\end{aligned}
$$

b) Calcular usando coordenadas cartesianas y polares el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

En coordenadas cartesianas:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dydx \\
&= \int_{-1}^1\left[y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{4}{3}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{8}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2}dx
\end{aligned}
$$

Usando el cambio de variables $u = \operatorname{sen}(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \\
&= \frac{8}{6}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta)d\theta - \frac{8}{12}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2\theta))(1+\cos(2\theta))d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{12}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos^2(2\theta)d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2(2\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos(4\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

En coordenadas polares:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

P3. *a*) Sea Ω la región triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Calcule

$$\int\int_\Omega \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$$

En coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \underbrace{\iint_\Omega \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dxdy}_{I} &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{-1}{\sqrt{1+r^2}}\right]_{r=0}^{r=\sec\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\sec^2\theta}}\right) d\theta \end{aligned}$$

Para $\theta \in [0, \pi/4]$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sec^2\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Luego, la integral puede escribirse como

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2\theta}}\right) d\theta \\ &= \left[\theta - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

b) Calcule el área de la superficie plana de ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

que se encuentra en el primer octante.

El área pedida es

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx &= \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \sqrt{1 + c^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]} dydx \\ &= \sqrt{1 + c^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]} \int_0^a \left(-\frac{b}{a}x + b\right) dx \\ &= \sqrt{1 + c^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]} \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \end{aligned}$$

c) Usando un cambio de coordenadas adecuado, calcule el valor de

$$\int\int_D ye^{xy} dxdy$$

donde D es la región determinada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$ y las rectas $y = 1$, $y = 3$.

Haciendo el cambio de variables definido por la transformación $T(u, v) = (\frac{u}{v}, v)$, notamos que $v = y$ por lo que $1 \leq v \leq 3$. La región comprendida es tal que $1 \leq xy \leq 3$ y bajo el cambio de variables obtenemos $1 \leq u \leq 3$. Además el determinante del Jacobiano del cambio de coordenadas es

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{v}$$

por lo la integral pedida queda como

$$\iint_D ye^{xy} dxdy = \int_1^3 \int_1^3 ve^u \frac{1}{v} dudv = \int_1^3 \int_1^3 e^u dudv = 2(e^3 - e).$$

P4. a) Considere la función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\sigma, s)d\sigma ds$$

Demuestre que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

b) Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1$, $x = 3$. Calcule su volumen por doble integración.

La región de tipo I asociada corresponde a

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq 3, -x \leq y \leq y\}$$

De esta froma, el volumen V del sólido limitado por estas regiones es

$$\begin{aligned} V = \int\int_D (x^2 - y^2)dxdy &= \int_1^3 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)dydx \\ &= \int_1^3 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^{x} dx \\ &= \int_1^3 \frac{4}{3} x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^4 \right]_1^3 \\ &= \frac{80}{3} \end{aligned}$$

El P2 es obligatorio, y debe elegir 2 de los otros 3

TIEMPO: 2,5 HORAS