MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
 Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliar: Víctor Verdugo

Control 3

Miércoles 7 de Julio de 2010

P1. Sea Q la región contenida dentro del elipsoide de revolución cuya ecuación en coordenadas cartesianas es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Se define el sistema de coordenadas elípticas (r, θ, ϕ) mediante la transformación dada por

$$\begin{aligned} x &= ar \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= br \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= cr \cos \phi \end{aligned}$$

- a) (**2 ptos**) Calcule los intervalos de variación de (r, θ, ϕ) para la región Q y el jacobiano de la transformación.
- b) (**4 ptos**) Usando el cambio a coordenadas elípticas calcule la siguiente integral:

$$\iiint_Q \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^3} dx dy dz$$

P2. a) Dada una densidad de masa $\rho(x, y, z)$ en unidades de masa por volumen, para el sólido E , se define su masa como

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

y sus momentos alrededor de los tres planos de coordenadas son

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z) dV; \quad M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z) dV; \quad M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z) dV.$$

El centro de masa está ubicado en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Encuentre el centro de masa de un sólido de densidad constante que está limitado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.

- b) Calcular usando coordenadas cartesianas y polares el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$ y el paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$.

P3. a) Sea Ω la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Calcule

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

- b) Calcule el área de la superficie plana de ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

que se encuentra en el primer octante.

c) Usando un cambio de coordenadas adecuado, calcule el valor de

$$\int \int_D ye^{xy} dx dy$$

donde D es la región determinada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$ y las rectas $y = 1$, $y = 3$.

P4. a) Considere la función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\sigma, s) d\sigma ds$$

Demuestre que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

b) Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1$, $x = 3$. Calcule su volumen por doble integración.

El P2 es obligatorio, y debe elegir 2 de los otros 3

TIEMPO: 2,5 HORAS