

Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 17

Prof: Marcelo Leseigneur

Aux: Víctor Verdugo

Teorema del Cambio de Variables

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función de clase C^1 . Sea D' una región abierta y acotada con $\text{Adh}(D') \subset \Omega$, y supongamos además que T es inyectiva en D' , que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ un abierto. Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(T(u)) |det(T'(u))| du$$

Cambios de variable usuales:

■ Coordenadas Polares:

- $T(r, \theta) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, con $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.
- $det(T'(r, \theta)) = r$.

■ Coordenadas Cilíndricas:

- $T(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, con $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$.
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$, $z = z$.
- $det(T'(r, \theta)) = r$.

■ Coordenadas Esféricas:

- $T(r, \theta, \phi) = (x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$, con $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$.
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$, $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$.
- $det(T'(r, \theta)) = r^2 \sin \phi$.

P1. Calcule

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx$$

P2. Calcule

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy$$

P3. Hallar la masa de la porción del sólido Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$ situado por encima del plano XY . La densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano XY .

P4. Hallar el volumen del sólido comprendido entre las superficies $x^2 + y^2 = 3z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuando $z \geq 0$.

P5. Sea una horma cilíndrica de queso de base circular con radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Se corta un trozo S , haciendo dos cortes verticales desde el centro de la horma hacia su borde. Los cortes forman un ángulo α entre sí. Calcule el peso del trozo S si la densidad de masa del queso es

$$\rho(x, y, z) = k[\sqrt{x^2 + y^2}(z^2 - hz + h^2)]$$

P6. Una lámina tiene forma de semidisco de radio a . Hallar la masa de la lámina y su centro de masas sabiendo que la densidad de la lámina varía proporcionalmente a la distancia al centro del lado recto de la lámina.

Pauta Aux 17

Felipe Franco

P1 $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dz dy dx$

Límites de Integración:

$$\begin{array}{ccc} -1 \leq x \leq 1 & \xrightarrow{\text{cilíndricas}} & -1 \leq r \cos \theta \leq 1 & (1) \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & & -\sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} \leq r \sin \theta \leq \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} & (2) \\ x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2 & & r^2 \leq z \leq 2-r^2 & (3) \end{array}$$

Elevarlo (2) al cuadrado, obtenemos de * y de ** : $\rightarrow$ Agradecemos a Carlo por la observación

$0 \leq r \leq 1$ cuando $\theta \in [0, \pi]$ cuando $\theta \in [\pi, 2\pi]$

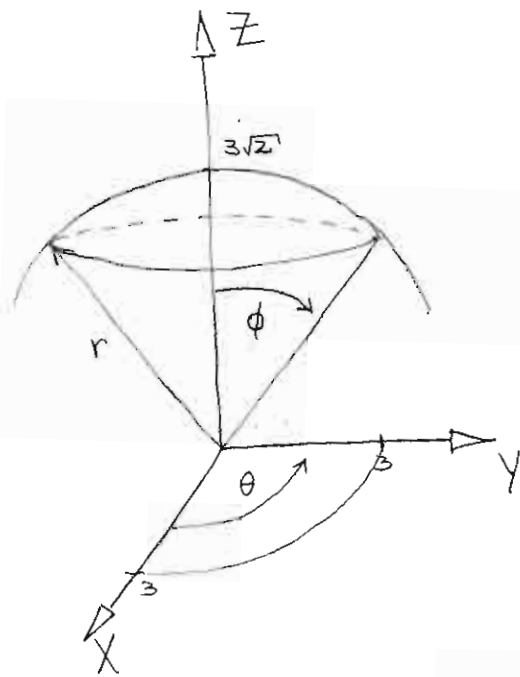
y con esto (1) se cumple siempre, por lo que θ queda libre. Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} (r^2)^{3/2} r dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 dz d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^4 (2-r^2-r^2) dr \\ &= 4\pi \left(\int_0^1 r^4 dr - \int_0^1 r^6 dr \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8\pi}{35} \end{aligned}$$

P2 $I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dz dx dy$

Para resolver esta integral haremos uso de las coordenadas esféricas. Para esto, notemos que la región

de integración es la del siguiente dibujo:



que corresponde al volumen
encerrado entre el cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y la circunferencia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18 \quad ,$$

en el primer octante.

Con esto, los límites de integración
para r son 0 y $3\sqrt{2}$ y para
 θ son 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Para calcular ϕ , veamos el ángulo en que la circunferencia
se intersecta con el cono:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow \sqrt{18} \sqrt{\sin^2 \phi} = \sqrt{18} \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\tan^2 \phi} = 1$$

en el
1er octante $\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$.

Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} r^2 \cdot r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{3\sqrt{2}} r^4 \left[-\cos \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^5}{5} \end{aligned}$$

P3

Notando que el sólido Q es un elipsoide, en coordenadas cilíndricas podemos describir al sólido como

$$4r^2 + z^2 \leq 16, \quad z \geq 0.$$

Luego, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4r^2}$.

Además la densidad $\rho(r, \theta, z)$ está dada por

$$\rho(r, \theta, z) = kz \quad (k > 0).$$

Luego, la masa de Q (m_Q) se calcula como

$$\begin{aligned} m_Q &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} \rho(r, \theta, z) r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \frac{k}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (16 - 4r^2) r \, d\theta \, dr \\ &= \pi k \left[\frac{16r^2}{2} - \frac{4r^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 16\pi k. \end{aligned}$$

P4

Debemos calcular el volumen comprendido entre el cono

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

y la circunferencia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

cuando $z \geq 0$. Ahora, usando coordenadas esféricas, debemos hacer algo similar a la [P2], sólo que con r entre 0 y 1, θ entre 0 y 2π y ϕ por calcular:

$$\sin^2 \phi = 3 \cos^2 \phi \Leftrightarrow \tan^2 \phi = 3$$

en la parte
del espacio en
que $z \geq 0$ $\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$.

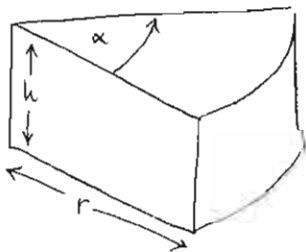
Luego, el volumen está dado por

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 [-\cos \phi]_0^{\pi/3} \, dr$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

[P5]



Debemos calcular el peso del trozo de un cilindro como el de la figura, con $\rho(r, \theta, z)$ en coord. cilíndricas igual a

$$\rho(r, \theta, z) = k r (z^2 - hz + h^2)$$

Luego, la masa m del queso se calcula como

$$m = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^h \kappa r (z^2 - hz + h^2) r dz d\theta dr.$$

$$= \frac{\alpha \kappa r^3}{3} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + h^2 \right) = \frac{5\alpha \kappa h^3 r^3}{18}$$



En coordenadas polares, podemos expresar la densidad de masa como

$$\rho(r, \theta, z) = \kappa r.$$

Luego, la masa del semidisco D es:

$$m_D = \int_0^a \int_0^\pi \kappa \cdot r \cdot r d\theta dr = \frac{\kappa \pi a^3}{3}$$

El centro de masas se calcula por componentes. Luego

$$\begin{aligned} \bar{X}_D &= \frac{1}{m_D} \iint_D x \rho(x, y, z) dx dy \\ &= \frac{1}{m_D} \int_0^a \int_0^\pi r \cos \theta \cdot \kappa r \cdot r d\theta dr \\ &= \frac{3}{\kappa \pi a^3} \int_0^a \int_0^\pi \kappa r^3 \cos \theta d\theta dr = 0 \quad (\text{por simetría}). \end{aligned}$$

Análogamente, para $\bar{Y}_D$

$$\bar{Y}_D = \frac{1}{m_D} \iint_D y \rho(x, y, z) dx dy$$

$$= \frac{1}{m_D} \int_0^a \int_0^\pi r \sin \theta \cdot kr \cdot r d\theta dr$$

$$= \frac{3}{\cancel{k} \pi a^3} \int_0^a \int_0^\pi \cancel{k} r^3 \sin \theta d\theta dr$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^a r^3 (\cos(0) - \cos(\pi)) dr$$

$$= \frac{3}{\pi \cancel{a^3}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{a^4}}{\cancel{4^2}} = \frac{3a}{2\pi}$$

luego, el centro de masas $\vec{x}$ es

$$\vec{x} = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$$