MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 16

Martes 29 de Junio de 2010

P1. *a*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Considere $f : (a,b) \times (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que

$$I = \int_a^b \int_a^x f(x,y)\ dydx = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\ dxdy$$

b) Deducir que si $f(x,y) = f(y,x)$ en el rectángulo $B = [a,b] \times [a,b]$ entonces

$$I = \frac{1}{2} \int \int_B f(x,y)\ dxdy$$

c) Pruebe que si $a > 0$ entonces

$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(y)}{y}\ dydx = \int_0^a f(x)\ dx$$

P2. Dado $\alpha \geq 1$ y una función continua $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definimos

$$I_\alpha(f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\ dt\ ,\ \forall x \geq 0$$

Muestre que si $\alpha, \beta \geq 1$ entonces

$$I_\alpha(I_\beta(f))(x) = C(\alpha, \beta) I_{\alpha+\beta}(f)(x)$$

donde $C(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\ dy$

P3. Calcule

a) $\displaystyle\int\int\int_A xyz\ dxdydz$, donde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ;\ x, y, z \geq 0\}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\ dxdydz$

c) $\displaystyle\int\int_D x^2 y^2\ dxdy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2\ \ , x \leq y \leq 4x\}$

P4. Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\ ,\ x + 2y + z \leq 1\ ,\ y \geq |x|\}$. Calcule

a) $\displaystyle\int_E dV$

b) $\displaystyle\int_E y\ dV$