MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta Control 2

Miércoles 9 de Junio de 2010

P1. *i)* **(3 ptos)** Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y, z) = xy + z$$

determine si existen mínimo y máximo global de la función sobre la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 \leq 1\}$$

En caso de existir, calcúlelos.

Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy + z^2$. Tenemos que g es continua y $(-\infty, 1]$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, luego, $A = g^{-1}((-\infty, 1])$ es cerrado en $\mathbb{R}^3$ (pues es preimagen de un cerrado mediante una función continua). Por otro lado, sea $(x, y, z) \in A$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - xy + z^2 \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + xy \\
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\
&\Rightarrow \quad \|(x, y, z)\|_2 \leq \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Luego, A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, y por lo tanto, es compacto. Este hecho, sumado a que $f(x, y, z) = xy + z$ es continua, garantiza que el máximo y el mínimo de f se alcanzan en A. Para encontrarlos, procedamos a estudiar primero $int(A)$ y luego ∂A.

a) $int(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 < 1\}$

Puesto que $int(A)$ es abierto, imponemos la condición necesaria de primer orden, y luego de eso vemos cuales de los candidatos están en A:

$$\nabla f(x, y, z) = 0$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Es decir, $\nabla f(x,y,z) \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in int(A)$, y por lo tanto en esta región no hay candidatos a mínimos ni máximos locales (tampoco globales).

b) $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 = 1\}$

En este caso, usamos el método de los multplicadores de Lagrange:

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + z - \lambda(x^2 + y^2 - xy + z^2 - 1)$$

Imponemos la condición necesaria de primer orden:

$$\nabla L(x,y,z,\lambda) = 0$$

lo cual origina el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y - 2\lambda x + \lambda y &= 0 \\ x - 2\lambda y + \lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 - xy + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se desprende que $\lambda \neq 0$, y de las dos primeras se tiene:

$$\begin{aligned} y(\lambda + 1) &= 2\lambda x \\ x(\lambda + 1) &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Si $\lambda = -1$, entonces $x = y = 0$, y de la tercera y cuarta ecuación se obtiene que z es $-\dfrac{1}{2}$ y ± 1 respectivamente, lo que es una contradicción. Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= x\left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right) \\ x &= y\left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando en la primera ecuación el valor de x obtenido en la segunda ecuación:

$$y\left[1 - \frac{4\lambda^2}{(\lambda + 1)^2}\right] = 0$$

Si $y = 0$, se tiene que $x = 0$, y reemplazando estos valores en la cuarta ecuación se obtienen dos candidatos:

$$a_1 = (0,0,1) \quad y \quad a_2 = (0,0,-1)$$

Ahora se despeja λ, que arroja dos valores:

$$\lambda_1 = 1 \quad y \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

Para $\lambda_1 = 1$ se despeja z de la tercera ecuación, obteniendo $z = \dfrac{1}{2}$ y de las dos primeras queda $x = y$. Reemplazando en la cuarta ecuación se tienen los candidatos:

$$\begin{aligned} a_3 = (x_1, y_1, z_1) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ a_4 = (x_2, y_2, z_2) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Para $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$, se despeja z de la tercera ecuación, obteniendo $z = -\dfrac{3}{2}$ y de la primera o segunda ecuación se tiene que $x = -y$. Usando esto en la cuarta ecuación, queda:

$$x^2 = -\frac{5}{12}$$

y por lo tanto, este caso no entrega candidatos. Finalmente, como la existencia de máximo y mínimos globales en la región A está garantizada, y en $int(A)$ no habían candidatos, necesariamente deben estar en ∂A. Luego, nos basta evaluar en los puntos a_1, a_2, a_3, a_4 para ver en cuales de ellos se alcanzan el mínimo y máximo global:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= 1 \\ f(a_2) &= -1 \\ f(a_3) &= f(a_4) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Se concluye entonces que el mínimo global se alcanza en $a_2 = (0, 0, -1)$ y el máximo global se alcanza en los puntos $a_3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $a_4 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

ii) **(3 ptos)** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) **(0.5 ptos)** Calcule $f(x,0)$ y $f(0,y)$ para $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Probaremos que f posee discontinuidades reparables en los puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para ello, debemos probar que $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$ existen. En efecto, cuando $(x,y) \neq (0,0)$, notemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x,y)| \leq \left| x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right| \\ &\leq x^2 \left| \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right| + y^2 \left| \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right| \longrightarrow x^2 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

cuando $y \longrightarrow 0$. Luego, $f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq |f(x,y)| \leq \left| x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right| \\
&\leq x^2 \left|\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right| + y^2 \left|\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right| \longrightarrow 0 \cdot \frac{\pi}{2} + y^2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

cuando $x \longrightarrow 0$, y por lo tanto $f(0,y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

b) **(0.5 ptos)** Para $(x,y) \neq (0,0)$ determine $\nabla f(x,y)$ y $H_f(x,y)$. ¿Es $H_f(x,y)$ una matriz simétrica?

$$\nabla f(x,y) = \left(2x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y, x - 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} - 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$$

La matriz $H_f(x,y)$ es simétrica.

c) **(1 pto)** ¿Se cumple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Justifique.

Antes de calcular las derivadas cruzadas, veamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

En donde usamos que $f(0,t) = f(t,0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (esto se probó en la parte *a*)). Además, cuando $t \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \lim_{h\to 0} \left[2h \arctan\left(\frac{t}{h}\right) - t\right] = -t$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \lim_{h\to 0} \left[t - 2h \arctan\left(\frac{t}{h}\right)\right] = t$$

Ahora, calculemos las derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} \\
&= -1
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

d) **(1 pto)** Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno a $(0,0)$.

El polinomio de Taylor de orden 2 está dado por:

$$\begin{aligned}
p(h) &= f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), h\rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h \\
&= 0 + \langle 0, h\rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h \\
&= \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h
\end{aligned}$$

Calculemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$. Previamente, veamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 2t \arctan\left(\frac{0}{t}\right) - 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) = 0 - 2t \arctan\left(\frac{0}{t}\right) = 0$$

Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

y por lo tanto, el polinomio p es:

$$\begin{aligned}
p(h) &= \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(-h_1 h_2 + h_2 h_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

P2. Elija entre a) ó b)

a) Sean $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Suponga además que

$$\text{máx}\{\|\nabla g_i(x)\|_\infty \;:\; x \in \mathbb{R}^n\} < \frac{1}{2n} \quad , \quad \forall i \in \{1 \ldots, n\}$$

Pruebe que el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x) \\ x_2 &= g_2(x) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x) \end{aligned}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Indicación: Recuerde que el espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es Banach.

Consideremos la función $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, pues sus componentes lo son. Dado que $\mathbb{R}^n$ es convexo, el Teorema del Valor Medio asegura que:

$$\|G(b) - G(a)\|_1 \leq \sup_{x \in]a,b[} \|DG_x\|_{\mathcal{L}} \|b - a\|_1$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $]a, b[= \{a(1-t) + bt : t \in (0,1)\}$ y $\|DG_x\|_{\mathcal{L}} = \sup\limits_{h \in \mathbb{R}^n} \dfrac{\|DG_x(h)\|_1}{\|h\|_1}$. Por otro lado,

$$\|DG_x(h)\|_1 = \|J_G(x)h\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\,\langle \nabla g_i(x), h\rangle\,| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\nabla g_i(x)\|_\infty \cdot \|h\|_1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} \cdot \|h\|_1 = \frac{1}{2}\|h\|_1$$

lo que nos permite establecer que

$$\|DG_x\|_{\mathcal{L}} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\|DG_x(h)\|_1}{\|h\|_1} \leq \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\frac{1}{2}\|h\|_1}{\|h\|_1} = \frac{1}{2}$$

para todo $x \in]a, b[$, y por lo tanto $\sup\limits_{x \in]a,b[} \|DG_x\|_{\mathcal{L}} < \dfrac{1}{2}$. De esto obtenemos que

$$\|G(b) - G(a)\|_1 < \frac{1}{2}\|b - a\|_1$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto G es contractante. Dado que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach, y $\mathbb{R}^n$ es cerrado, El Teorema del Punto Fijo nos permite concluir que existe un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(x) = x$, es decir, que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x) \\ x_2 &= g_2(x) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x) \end{aligned}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

b) Sea $z = f(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 z e^y + y^2 e^z + y = 1$$

Si $g(u, v) = (u^2 + v + 1, v^2)$, calcule

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial u \partial v}(0, 0)$$

Justifique.

Consideremos la función $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = x^2 z e^y + y^2 e^z + y - 1$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ (en particular es $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$), y $F(1, 0, 1) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$. Además, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 1 + 0 = 1 \neq 0$. En virtud del Teorema de la Función Implícita, existen $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y $W \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos, con $(1, 0, 1) \in U$ y $(1, 0) \in W$ tales que $z = f(x, y)$, con $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(W)$ y $F(x, y, f(x, y)) = 0$, para todo $(x, y) \in W$. Dado que $f, g \in \mathcal{C}^2(W)$, entonces $(f \circ g) \in \mathcal{C}^2(W)$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial v \partial u}(u, v)$$

para todo $(u, v) \in W$. Por regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v)) \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v)) \cdot 0 = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v))$$

Nuevamente, por regla de la cadena, queda que:

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial v \partial u}(u, v) = 2u \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(u, v)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(g(u, v)) \cdot 2v \right] = 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(u, v)) + 4uv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(g(u, v))$$

Luego, evaluando en $(u, v) = (0, 0)$ obtenemos que $\dfrac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial u \partial v}(0, 0) = 0$.

P3. *a)* **(3 ptos)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere la siguiente ecuación (1) en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación anterior.

i) **(0.5 ptos)** Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un cambio de variable definido por

$$\phi(x, t) = \begin{pmatrix} x + vt \\ x - vt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, w) = f \circ \phi^{-1}(u, w)$ está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Es claro que:

$$\phi(x, t) = \begin{pmatrix} x + vt \\ x - vt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

Y dado que $\left|\begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & -v \end{pmatrix}\right| = 2v \neq 0$, entonces es invertible, y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(u,w) &= -\begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & -v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2v}\begin{pmatrix} -v & -v \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2v}\begin{pmatrix} -vu - vw \\ -u + w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{u+w}{2} \\ \dfrac{u-w}{2v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y $\phi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Como $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es también de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, se concluye que $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(u,w) = f \circ \phi^{-1}(u,w)$ está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

ii) **(1.5 ptos)** Usando el cambio de variable anterior, pruebe que la ecuación (1) se transforma en la siguiente ecuación (2)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0$$

para todo $(u,w) \in \mathbb{R}^2$.

Por regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial w}(u,w) &= \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial w}(u,w) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial t}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot -\frac{1}{2v} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\phi^{-1}(u,w)) - \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial t}(\phi^{-1}(u,w))\right]
\end{aligned}$$

Ahora, usando nuevamemte regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot \frac{1}{2v}\right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\phi^{-1}(u,w)) \cdot \frac{1}{2v}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi^{-1}(u,w)) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\phi^{-1}(u,w))\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Se usó el hecho de que las derivadas cruzadas de f son iguales, pues es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, y que f satisface la ecuación (1).

iii) **(1 pto)** Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una solución general para $f(x,t)$ solución de la ecuación (1). Encuentre una solución particular para f que no sea ni la función nula, ni un polinomio.

Primero notemos que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial g}{\partial w}(u,w)\right) = 0$, y por lo tanto $\dfrac{\partial g}{\partial w}(u,w)$ es constante respecto a u. Esto nos dice que

$$\frac{\partial g}{\partial w}(u,w) := \eta(w)$$

Luego, mediante la primitiva obtenemos que:

$$g(u,w) = \int \eta(w)\, dw + \xi(u) := \psi(w) + \xi(u)$$

y por lo tanto

$$f(x,t) = g(x+vt, x-vt) = \xi(x+vt) + \psi(x-vt)$$

donde $\xi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Ahora si tomamos $\xi(x) = \psi(x) = e^x$ obtenemos una solución particular de la forma

$$f(x,t) = e^{x+vt} + e^{x-vt}$$

b) *i)* **(1.5 ptos)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, que satisface

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$$

y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que f posee un máximo global.

Dado que $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$, existe $R_0 > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, R_0)^c$. Por otra parte, como $\bar{B}(x_0, R_0)$ es compacta y f es continua, existe $\bar{x} \in \bar{B}(x_0, R_0)$ tal que $f(\bar{x}) \geq f(x)$, $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, R_0)$. En particular, como $x_0 \in \bar{B}(x_0, R_0)$, se tiene que $f(\bar{x}) \geq f(x_0)$, y por lo tanto $f(\bar{x}) \geq f(x)$, $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, R_0)^c$. Luego, como $f(\bar{x}) \geq f(x)$ $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, R_0)$ y $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, R_0)^c$, se concluye que f alcanza su máximo global en $\bar{x}$.

ii) **(1.5 ptos)** Sea $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b > 0$. Calcule máximos y mínimos globales.

Indicación: Analice los casos $a = b$, $a > b$ y $a < b$.

Primero, notemos que f es continua en $\mathbb{R}^2$, y además

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \frac{ax^2 + by^2}{e^{x^2+y^2}} = 0$$

El teorema probado en la parte *a)* asegura que f alcanza su máximo global, y por lo tanto nos basta aplicar condición de primer orden y evaluar para encontrarlo. Por otro lado, es claro que $f(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y dado que $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, se tiene que

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

y por lo tanto f alcanza su mínimo global en $(0,0)$. Busquemos el máximo ahora. Al imponer la condición de primer orden se tiene

$$\nabla f(x,y) = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2axe^{-(x^2+y^2)} - 2x(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2bye^{-(x^2+y^2)} - 2y(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0
\end{aligned}$$

lo cual arroja el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x(a - ax^2 - by^2) = 0 \\
y(b - ax^2 - by^2) = 0
\end{aligned}$$

El caso $(x,y) = (0,0)$ se descarta, pues corresponde al mínimo global. Los tres casos restantes son:

$$\begin{array}{rcl}
x = 0 & , & y = \pm 1 \\
x = \pm 1 & , & y = 0 \\
a = b & , & x^2 + y^2 = 1
\end{array}$$

Si $a \neq b$, el tercer caso no vale, y al evaluar en los dos primeros se obtiene:

$$f(0,1) = f(0,-1) = \frac{b}{e}$$

$$f(1,0) = f(-1,0) = \frac{a}{e}$$

y por lo tanto, si $a > b$ el máximo global se alcanza en los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, y si $a < b$ se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$. Ahora, si $a = b$, entonces se reduce al tercer caso y por lo tantoel máximo global se alcanza en la región $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

TIEMPO: 3 HORAS