MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Control 2

Miércoles 9 de Junio de 2010

P1. *i*) Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y,z) = xy + z$$

determine si existen mínimo y máximo global de la función sobre la región

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 \leq 1\}$$

En caso de existir, calcúlelos.

ii) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule $f(x,0)$ y $f(0,y)$ para $x \neq 0$, $y \neq 0$.

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$ determine $\nabla f(x,y)$ y $H_f(x,y)$. ¿Es $H_f(x,y)$ una matriz simétrica?

c) ¿Se cumple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Justifique.

d) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno a $(0,0)$.

P2. Elija entre a) ó b)

a) Sean $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Suponga además que

$$\max\{\|\nabla g_i(x)\|_\infty \ : \ x \in \mathbb{R}^n\} < \frac{1}{2n} \quad , \quad \forall i \in \{1 \ldots, n\}$$

Pruebe que el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x) \\ x_2 &= g_2(x) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x) \end{aligned}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Indicación: Recuerde que el espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es Banach.

b) Sea $z = f(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 z e^y + y^2 e^z + y = 1$$

Si $g(u, v) = (u^2 + v + 1, v^2)$, calcule

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial u \partial v}(0, 0)$$

Justifique.

P3. *a)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere la siguiente ecuación (1) en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación anterior.

i) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un cambio de variable definido por

$$\phi(x, t) = \begin{pmatrix} x + vt \\ x - vt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, w) = f \circ \phi^{-1}(u, w)$ está bien definida y es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

ii) Usando el cambio de variable anterior, pruebe que la ecuación (1) se transforma en la siguiente ecuación (2)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u, w) = 0$$

para todo $(u, w) \in \mathbb{R}^2$.

iii) Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una solución general para $f(x, t)$ solución de la ecuación (1). Encuentre una solución particular para f que no sea ni la función nula, ni un polinomio.

b) *i)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, que satisface

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$$

y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que f posee un máximo global.

ii) Sea $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b > 0$. Calcule máximos y mínimos globales.

Indicación: Analice los casos $a = b$, $a > b$ y $a < b$.

TIEMPO: 3 HORAS