MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
 Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliar: Víctor Verdugo

Auxiliar 13

Martes 8 de Junio de 2010

i) Teorema de la Función Inversa

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 . Supongamos que para $a \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)$ es invertible y $f(a) = b$. Entonces:

- a) Existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es biyectiva.
 b) Si $g : V \rightarrow U$ es la inversa de f , es decir, $g = f^{-1}$, entonces g es de clase C^1 y

$$Dg(b) = [Df(a)]^{-1}$$

ii) Teorema de la Función Implícita

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 , con Ω abierto, y $(a, b) \in \Omega$ tal que $f(a, b) = 0$. Digamos que $Df(a, b) = [D_x f(a, b) \ D_y f(a, b)]$ y supongamos que $D_y f(a, b)$ es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$, con $(a, b) \in U$ y $a \in W$, tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$. Esto define una función $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase C^1 , que satisface

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in W$$

$Dg(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x))$ para todo $x \in W$, y $g(a) = b$.

P1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2 . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

Indicación: Considere la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(a, x) := \nabla f(x) + a \nabla g(x)$$

P2. Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (s, t) = \left(x + \frac{1}{2} \arctan(y), y + \frac{1}{2} \arctan(x)\right)$$

admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0, 1)$.

P3. Pruebe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}e^u + xy^2 + v &= 2 \\ \text{sen } u + x^2y + v^3 &= 1\end{aligned}$$

define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ las funciones cuya existencia se ha probado. Calcule:

$$u(0, 2), v(0, 2), \frac{\partial u}{\partial x}(0, 2), \frac{\partial u}{\partial y}(0, 2), \frac{\partial v}{\partial x}(0, 2), \frac{\partial v}{\partial y}(0, 2)$$