MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 11

Martes 1 de Junio de 2010

P1. Considere una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2.

a) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0, entonces la matriz Hessiana $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir, $h^t H_f(x_0) h \geq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

b) Suponga ahora que f satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -1$$

$\forall x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que f no puede tener un mínimo local en D.

P2. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, convexo y no vacío. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es convexa

b) $f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y)$, $\forall x, y \in D$

c) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in D$

Además, pruebe que si f es convexa, entonces x_0 es mínimo global para f sí y solo sí $\nabla f(x_0) = 0$.

P3. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Halle los extremos de f.

P4. La gráfica de $g(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ define una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Hallar los puntos sobre S más cercanos al origen.

P5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^5 y + x y^5 + xy$. Clasifique sus puntos críticos.