MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Tarea 2

Fecha de entrega: Lunes 24 de mayo, en cátedra.

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Encuentre las derivadas parciales de f y estudie la continuidad de ellas en $\mathbb{R}^2$.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

d) Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

e) Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) ¿Es f de clase $\mathcal{C}^2$? Justifique.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, en caso de existir.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

d) Encuentre la matriz jacobiana de f en $(1,1)$.

e) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en $(1,1,f(1,1))$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Pruebe que f es continua en $(0,0)$.

b) Pruebe que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Calcule las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, en caso de existir.

d) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? Justifique.

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + y^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

b) Calcule las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2$, en caso de existir.

c) Analice la continuidad de las derivadas parciales en $(0,0)$.

P5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine los $v \in \mathbb{R}^2$ para los cuales existe $f'((0,0);v)$.

b) Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

P6. Sea $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = x \cdot \alpha(x)$. Pruebe que ϕ es diferenciable en U y calcule $D\phi(x)$ para todo $x \in U$, en función de $D\alpha(x)$.

P7. Considere $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y determine $Df(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

P8. Sea $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $a \in \mathbb{R}^m$ fijo. Se define $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \|l(x) - a\|^2$. Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y calcule $Df(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

P9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine los valores de α para los cuales la función f es diferenciable en $(0,0)$.

P10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right] & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

P11. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$, con $y \neq 0$, pasan por el origen, es decir, por el punto $(0,0,0)$.

P12. Muestre que la ecuación del plano tangente a la elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

P13. Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\sqrt{x^2+y^2}$$

Pruebe que f es diferenciable en Ω y encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f para todos los puntos $(x,y) \in \Omega$ tales que $x = y$.

P14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Suponga que existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ y

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \leq 0$$

Pruebe que $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$.

P15. Muestre que el siguiente sistema admite una única solución en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y &= 5+\frac{1}{3}\ln(1+x^2+y^2) \end{aligned}$$

P16. Sea $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ fija. Pruebe que existe $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ que satisface la ecuación

$$f(x) - \int_0^x f(x-t)e^{-t^2}\, dt = g(x)$$

P17. Muestre que la siguiente ecuación integral admite una única solución en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$:

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x-y}\cos(u(y))\, dy$$

P18. Considere la ecuación integral

$$u(x) = 5 + \int_0^x \operatorname{sen}(u(y)+x)\, dy$$

Pruebe que admite una única solución en $\mathcal{C}([0,1/2],\mathbb{R})$

P19. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, es decir, A es una matriz de $n \times n$ a coeficientes reales. Suponga además que $\|A\| < 1$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de Frobenius. El objetivo, es probar que $I - A$ es invertible.

a) Pruebe que B es la inversa de $I - A$ si y solo si B es punto fijo de la función $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definida por $T(B) = I + AB$.

b) Demuestre que T tiene un único punto fijo en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) Se define la sucesión $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como $B_0 = I$, y $B_{k+1} = T(B_k)$. Pruebe que $T(B_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} A^i$, y concluya.

P20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, con $x = r\cos\theta$ e $y = r\cos\theta$. Pruebe lo siguiente:

a) $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

b) $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = r\left[\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$

c) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + \operatorname{sen}^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

d) $\|\nabla f(x,y)\|^2 = \left[\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right]^2$

P21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Considere el cambio de variables a coordenadas polares, es decir, $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, donde $r \in [0, +\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Suponga que $g(r,\theta) = f(x,y)$, y considere $r \neq 0$.

Se define el operador Laplaciano como:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Pruebe que:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

P22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Diremos que f satisface la ecuación de Laplace si

$$\Delta f(x,y) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se define $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Pruebe que si f satisface la ecuación de Laplace, entonces ϕ también la satisface. A una función que satisfaga esta ecuación se le llamará armónica.

P23. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, y se define $z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $z(x,y) = \dfrac{f(x-y)}{y}$. Pruebe que

$$z(x,y) + y\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right] = 0$$

P24. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, y se define $z : \mathbb{R}^2 \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}$ como $z(x,y) = f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Pruebe que

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$$

P25. Encuentre las funciones $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = k \cdot f(x,y)$$

con $k \in \mathbb{R}$.