MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta Control 1

Viernes 7 de Mayo de 2010

P1. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos. Se define la distancia entre A y B como

$$d(A,B) = \text{ínf}\{\|x-y\| : x \in A \ , y \in B\}$$

a) **(1 pto)** ¿Es d una métrica en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$? Justifique.

Consideremos en el evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ al subespacio $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$, y tomemos $A = \{-3,-1\}$, $B = \{1,3\}$ y $C = \{-1,1\}$. Es fácil ver que

$$d(A,C) + d(C,B) = 0 + 0 = 0 < 2 = d(A,B)$$

y por lo tanto no se satisface la desigualdad triangular. Luego, d no es una métrica en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

b) **(1 pto)** Demuestre que si

$$A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

Primero, probemos que si $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\text{ínf}(C_2) \leq \text{ínf}(C_1)$. Efectivamente, como $\text{ínf}(C_2) \leq a$, $\forall a \in C_2$, en particular, $\text{ínf}(C_2) \leq b$, $\forall b \in C_1$, pues $C_1 \subseteq C_2$. Luego, $\text{ínf}(C_2)$ es cota inferior de C_1 y por lo tanto $\text{ínf}(C_2) \leq \text{ínf}(C_1)$.

Ahora tomemos los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

$$C_1 = \{\|x-y\| : x \in A_1, y \in B_1\}$$
$$C_2 = \{\|x-y\| : x \in A_2, y \in B_2\}$$

Dado que $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2$, se tiene que $C_1 \subseteq C_2$. Ocupando lo probado anteriormente, tenemos que $\text{ínf}(C_2) \leq \text{ínf}(C_1)$, es decir, $d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$.

c) En el caso particular en que $A = \{x\}$ se define

$$d(x,B) = \text{ínf}\{\|x-y\| : y \in B\}$$

Pruebe que:

i) **(1 pto)** Si $x \in B \Rightarrow d(x,B) = 0$.

Primero, probemos que $d(A,B) \geq 0$, para todo $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Lo haremos por contradicción, es decir, supongamos que $d(A,B) < 0$, para ciertos $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Si tomamos $\alpha = \dfrac{d(A,B)}{2}$, tenemos que:

$$d(A,B) < \alpha < 0 \leq \|x-y\| \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

lo cual es una contradicción, pues α sería una cota inferior de $\Sigma = \{\|x-y\| : x \in A\ , y \in B\}$, y sería mayor que $\text{ínf}(\Sigma) = d(A,B)$. Esto, en particular, nos dice si consideramos $A = \{x\}$, tenemos que $d(x,B) \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Sea ahora $x \in B$, y consideremos $\Sigma_x = \{\|x-y\| : y \in B\}$. Dado que $\|x-x\| = 0 \in \Sigma_x$, tenemos que $d(x,B) = \text{ínf}(\Sigma_x) \leq 0$. Pero previamente probamos que $d(x,B) \geq 0$, y por lo tanto $d(x,B) = 0$.

ii) **(1 pto)** Si $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow d(x,A_2) \leq d(x,A_1)$.

Esto es directo de lo probado en la parte *b*), pues:

$$\{x\} \subseteq \{x\} \wedge A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow d(x,A_2) \leq d(x,A_1)$$

d) **(1 pto)** Pruebe que $d(x,\bar{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

$\Leftarrow$) Si $x \in \bar{A}$, por lo probado en la parte *c*), es directo que $d(x,\bar{A}) = 0$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $d(x,\bar{A}) = 0$, y denotemos $\Sigma_x = \{\|x-y\| : y \in \bar{A}\}$. Dado que $\text{ínf}(\Sigma_x) = d(x,\bar{A}) = 0$, por la caracterización de ínfimo sabemos que existe $y_1 \in \bar{A}$ tal que $|x-y_1| < 1$. De la misma manera, podemos encontrar $y_2 \in \bar{A}$ tal que $|x-y_2| < \frac{1}{2}$, y asi sucesivamente, generando una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{A}$ tal que

$$|x-y_n| < \frac{1}{n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y que por lo tanto $y_n \longrightarrow x$. Pero $\bar{A}$ es cerrado, y como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{A}$, concluimos que $x \in \bar{A}$.

e) **(1 pto)** Si F es cerrado, demuestre que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Se concluye directamente usando la parte *d*), pues si F es cerrado, entonces $F = \bar{F}$

f) **(1 pto)** Muestre que $d(A,B) = d(\bar{A},\bar{B})$.

Dado que $A \subseteq \bar{A}$ y $B \subseteq \bar{B}$, usando la parte *b*) se tiene que $d(A,B) \geq d(\bar{A},\bar{B})$. Para la otra desigualdad, notemos que como $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son cerrados, $\mathbb{R}^n$ es dimensión finita y $d(\bar{A},\bar{B}) \geq 0$, existen $a \in \bar{A}$ y $b \in \bar{B}$ tales que $d(\bar{A},\bar{B}) = \|a-b\|$. Puesto que a y b son puntos adherentes de A y B respectivamente, existen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tales que $a_n \longrightarrow a$ y $b_n \longrightarrow b$, y por lo tanto, para $\epsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N_1$ y $|b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N_2$. Tenemos asi, que $\forall n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$

$$d(A,B) \leq \|a_n - b_n\| \leq \|a_n - a\| + \|a-b\| + \|b-b_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} + d(\bar{A},\bar{B}) + \frac{\epsilon}{2} = d(\bar{A},\bar{B}) + \epsilon$$

Como esta desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$, se concluye que $d(A,B) \leq d(\bar{A},\bar{B})$, y por lo tanto se tiene la igualdad.

g) **(1 pto)** Pruebe que $d(x,F) = d(x,\bar{F})$.

Se concluye directamente usando la parte *f*), pues $\{x\}$ es cerrado, y por lo tanto es igual a su adherencia.

P2. Es sabido que si E es un evn de dimensión finita, toda función lineal $L : E \longrightarrow F$ es continua, donde F es un evn cualquiera. Cuando E es de dimensión infinita, esto no ocurre necesariamente. Para probar esto, considere $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, dotado de la norma

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$$

a) **(2 ptos)** Verifique que $\|\cdot\| : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una norma.

- $(\forall p \in \mathbb{R}[X])\ 0 \leq \|p\| < \infty$, pues corresponde a un máximo sobre números positivos que se alcanza en virtud del Teorema de Weierstrass, ya que los polinomios son continuos en el intervalo cerrado y acotado $[0, 1]$.
- Sea $p \in \mathbb{R}[X]$. Entonces

$$\begin{aligned} \|p\| = 0 &\Leftrightarrow \max_{x\in[0,1]} |p(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in [0, 1])\ p(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ tiene infinitas raíces.} \\ &\Leftrightarrow p = 0. \end{aligned}$$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}[X]$. Entonces

$$\|\lambda p\| = \max_{x\in[0,1]} |\lambda p(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\lambda| \cdot |p(x)| = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} |p(x)| = |\lambda| \cdot \|p\|.$$

- Sean $p, q \in \mathbb{R}[X]$. Luego

$$\|p + q\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x) + q(x)|$$

que en virtud del Teorema de Weierstrass se alcanza para algun elemento $\bar{x} \in [0, 1]$. Luego

$$\begin{aligned} \|p + q\| &= |p(\bar{x}) + q(\bar{x})| \\ &\leq |p(\bar{x})| + |q(\bar{x})| \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |p(x)| + \max_{x\in[0,1]} |q(x)| \\ &= \|p\| + \|q\|. \end{aligned}$$

Luego, $||\cdot||$ es norma en $\mathbb{R}[X]$.

b) **(1 pto)** Sea $L : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(p) = p(3)$. Pruebe que L es lineal.

En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}[X]$ con grados n y m respectivamente y supongamos que $n > m$. Entonces

$$\begin{aligned} L(\alpha p + q) &= (\alpha p_0 + q_0) + (\alpha p_1 + q_1) \cdot 3 + \cdots + (\alpha p_m + q_m) \cdot 3^m + \alpha p_{m+1} \cdot 3^{m+1} + \cdots + \alpha p_n \cdot 3^n \\ &= \alpha(p_0 + p_1 \cdot 3 + \cdots + p_n \cdot 3^n) + q_0 + q_1 \cdot 3 + \cdots + q_m \cdot 3^m \\ &= \alpha p(3) + q(3) \\ &= \alpha L(p) + L(q) \end{aligned}$$

Luego, L es lineal. El caso en que $n = m$ y $n < m$ son análogos.

c) **(3 ptos)** Sea $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$, tal que $p_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Muestre que $\|p_k\| \longrightarrow 0$ pero $|L(p_k)| \longrightarrow \infty$. Concluya.

En efecto, tenemos que

$$\|p_k\| = \max_{x\in[0,1]} |p_k(x)| = \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{2^{2k}} |x^{2k}| \leq \frac{1}{2^{2k}} \longrightarrow 0$$

pues $x \in [0, 1]$.

Por otra parte,

$$|L(p_k)| = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right| \longrightarrow \infty$$

pues $\dfrac{3}{2} > 1$.

Notando que $p_k \longrightarrow 0$ ($\|p_k - 0\| = ||p_k|| \longrightarrow 0$), si L fuera continua debería suceder que

$$L(p_k) \longrightarrow L(0) = 0,$$

lo que se contradice con $|L(p_k)| \longrightarrow \infty$.

Otra manera de verlo es notar que, de ser L continua, tendríamos que

$$(\exists C \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{R}[X])\ |L(p)| \leq C\|p\|.$$

Como $\|p_k\| \to 0$, existe $N_0 \in$ tal que $\forall\ n > N_0$ se tiene que $\|p_n\| < \frac{1}{C}$. Análogamente, para $|L(p_k)|$ existe un N_1 tal que $\forall\ n > N_1$ se tiene que $|L(p_n)| > 1$. De este modo, para todo $n > \max\{N_0, N_1\}$ se tiene que

$$1 < |L(p_n)| \leq C\|p_n\| < 1$$

lo que es una contradicción.

Así tenemos que L es una función lineal no continua, lo que adicionalmente nos permite afirmar que $\mathbb{R}[X]$ no es de dimensión finita.

P3. *a*) **(2,5 ptos)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Pruebe que el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es cerrado. Determínelo explícitamente.

Tomemos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$. Podemos notar que f es continua en A, pues es cuociente de funciones que son continuas en A y cuyo denominador no se anula. Probemos, que el conjunto en donde f es discontinua es $\mathbb{R} \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$, es decir, los ejes. Tomemos el par $(x,0) \in \mathbb{R} \setminus A$, y consideremos la sucesión $\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow (x,0)$, sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3 - \dfrac{1}{n^3}}{x \cdot \dfrac{1}{n}} = nx^2 - \frac{1}{n^2 x} \longrightarrow \infty \neq f(x,0)$$

es decir, f no es contiua en $(x,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Análogamente, se prueba que f no es continua en $(0,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Solo nos falta probar que es discontinua en el origen. Consideremos entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión, satisface que $\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$, pero

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\dfrac{1}{n^6} - \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}} = \frac{1}{n^3} - 1 \longrightarrow -1 \neq f(0,0)$$

y por lo tanto, probamos que f no es continua en $(0,0)$. Luego, efectivamente, $\mathbb{R} \setminus A$ era el conjunto de discontinuidades. Para finalizar esta parte, ocuparemos la función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = xy$. Esta función es continua, y $g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus A$. Dado que las preimágenes de cerrados mediante funciones continuas son conjuntos cerrados, y $\{0\}$ es un cerrado, se concluye que $g^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus A$ es cerrado.

b) **(1 pto)** Estudie el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^2}$.

Tomemos los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\Gamma_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Luego, tenemos que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Gamma_1}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{(0-x)^2}{x^2+0} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Gamma_2}(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2-0)^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$$

y por lo tanto, el límite no existe.

c) Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

i) **(1,5 ptos)** Calcule y dibuje las curvas de nivel de f.

Es fácil ver que f es sobreyectiva. Luego, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = c$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(x,y) = c \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2} = c \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \end{aligned}$$

es decir, la curva de nivel de c corresponde a una circunferencia con centro en $\left(\dfrac{1}{2c}, 0\right)$ y radio $\dfrac{1}{2c}$.

ii) **(1 pto)** Utilizando las curvas de nivel calculadas en $i)$, pruebe que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Notemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\left(x - \dfrac{1}{2c}\right)^2 + y^2\right] = \left(\dfrac{1}{2c}\right)^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$, lo que nos dice que el límite en $(0,0)$, puede tomar infinitos valores, y por tanto f es discontinua en $(0,0)$. Otra forma de verificar que f es discontinua en $(0,0)$, es tomando los siguientes conjuntos:

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\Gamma_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Calculando los límites tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Gamma_1}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+0} = \infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Gamma_2}(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

P4. *a*) **(1,5 ptos)** Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = f(g(xy), f(y^2, x))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. Calcule las derivadas parciales de F.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(xy), f(y^2, x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(xy) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial y}(g(xy), f(y^2, x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(y^2, x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(xy), f(y^2, x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(xy) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(g(xy), f(y^2, x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(y^2, x) \cdot 2y$$

b) Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ningún punto. A partir de ϕ, se define $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \phi(x)y$.

i) **(1,5 ptos)** Pruebe que existe alguna función ϕ con la propiedad anterior. (De un ejemplo)

Consideremos la siguiente función:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Primero probemos que es continua en 0. Para ello, tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \longrightarrow 0$. Luego, por definición de ϕ, se tiene que

$$0 \leq |\phi(x_n)| \leq |x_n| \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por sandwich se concluye que $\phi(x_n) \longrightarrow 0 = \phi(0)$, y por lo tanto ϕ es continua en 0.

Ahora probaremos que no es continua en ningún otro punto. Para ello, primero supongamos que $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, y tomemos dos sucesiones, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, y $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tales que

$$x_n = x + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\hat{x}_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que $x_n \longrightarrow x$ y $\hat{x}_n \longrightarrow x$, sin embargo, tenemos que:

$$\phi(x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \phi(x_n) \longrightarrow 0$$

$$\phi(\hat{x}_n) = x + \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \phi(\hat{x}_n) \longrightarrow x$$

Luego, ϕ no es continua en $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Ahora, consideremos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dado que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, tal que $x_n \longrightarrow x$. Sin embargo,

$$\phi(x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \phi(x_n) \longrightarrow 0 \neq x = \phi(x)$$

y por lo tanto no es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tenemos entonces, que ϕ es continua solo en $x = 0$. De aquí se desprende, que ϕ no puede ser derivable en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para analizar la derivabilidad de ϕ en $x = 0$, debemos estudiar el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(0 + h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{h}$$

Tomamos dos sucesiones, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, y $\{\hat{h}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tales que $h_n \longrightarrow 0$ y $\hat{h}_n \longrightarrow 0$, y podemos ver que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(h_n)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{h_n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\hat{h}_n)}{\hat{h}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{h}_n}{\hat{h}_n}=1$$

y por lo tanto, el límite no existe. Luego, ϕ no es derivable en $x=0$, y por lo tanto no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$.

ii) **(1,5 ptos)** Calcule las derivadas parciales de f para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Calcularemos las derivadas parciales en $(0,0)$ primero:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((t,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0\cdot\phi(t)-0\cdot\phi(0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\phi(0)-0\cdot\phi(0)}{t}=\phi(0)$$

Ahora, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f((x,y)+t(1,0))-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}y\left[\frac{\phi(x+t)-\phi(x)}{t}\right]$$

Pero este úlitmo límite no existe, pues ϕ no es derivable en ningún $x\in\mathbb{R}$. Luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe solo cuando $(x,y)=(0,0)$, y en ese caso se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Veamos la otra derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f((x,y)+t(0,1))-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\phi(x)}{t}=\phi(x)$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\phi(x)$.

iii) **(1,5 ptos)** ¿Es f diferenciable en (0,0)? Justifique.

Dado que $\nabla f(0,0)=(0,\phi(0))$, si f fuera diferenciable en $(0,0)$, debería cumplirse que

$$Df_{0,0}(h_1,h_2)=\nabla f(0,0)^t\cdot(h_1,h_2)=h_2\phi(0)$$

Verifiquemos que efectivamente f es diferenciable en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{h\to 0}\frac{|f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-Df_{0,0}(h_1,h_2)|}{\|h\|}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h_2\phi(h_1)-h_2\phi(0)|}{\|h\|}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h_2|}{\|h\|}|\phi(h_1)-\phi(0)|\\
&\leq \lim_{h\to 0}|\phi(h_1)-\phi(0)|\\
&= |\phi(0)-\phi(0)|=0
\end{aligned}$$

Y por lo tanto, por sandwich se concluye que f es diferenciable en $(0,0)$. En la última igualdad se utilizó la continuidad de la norma, y la continuidad de ϕ en 0.

TIEMPO: 3,5 HORAS