MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 9

Martes 11 de Mayo de 2010

P1. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 \in \Sigma_c(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = c\}$$

Este conjunto se conoce como la superficie de nivel c de ϕ. Muestre que $\nabla\phi(x_0)$ es normal a $\Sigma_c(\phi)$ en x_0, y deduzca que la ecuación del plano tangente a $\Sigma_c(\phi)$ en x_0 es

$$\langle \nabla\phi(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Además, usando lo anterior, encuentre el plano tangente a la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 3$, en el punto $(1, 1, 1)$.

P2. Sean S_1 y S_2 las superficies de $\mathbb{R}^3$, definidas por:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1\}$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in S_1 \cap S_2$.

a) Encuentre un vector normal a S_1 y un vector normal a S_2 en (x_0, y_0, z_0).

b) Encontrar una condición para que estos dos vectores sean ortogonales y deducir los valores de c para los cuales se cumple esta condición.

P3. Muestre que el siguiente sistema admite una única solución en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x + y) \\ y &= 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y) \end{aligned}$$

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, con $x = r\cos\theta$ e $y = r\cos\theta$. Pruebe lo siguiente:

a) $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

b) $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = r\left[\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]$

c) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + \operatorname{sen}^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$

d) $\|\nabla f(x, y)\|^2 = \left[\dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\right]^2$

P5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere el cambio de variables a coordenadas polares, es decir, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, donde $r \in [0, +\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Suponga que $g(r,\theta) = f(x,y)$, y considere $r \neq 0$.

Se define el operador Laplaciano como:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Pruebe que:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

P6. Considere una cuerda ondulante, cuyo desplazamiento está regido por una función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ y además satisface la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

donde $c^2 = \dfrac{\tau}{\rho}$. Suponga además, que $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ son L-periódicas en x. La cuerda está sujeta a las condiciones iniciales dadas por $u(x,0) = f(x)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, donde f es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y g es continua.

Se define la energía total de la cuerda como

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\tau\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx$$

Muestre que la energía total de la cuerda se conserva, es decir, $E(t)$ es constante. Concluya que

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho\int_0^L g(x)^2\,dx + \frac{1}{2}\tau\int_0^L f'(x)^2\,dx$$