MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Control 1

Miércoles 5 de Mayo de 2010

P1. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos. Se define la distancia entre A y B como

$$d(A,B) = \text{ínf}\{\|x-y\| : x \in A \ , y \in B\}$$

a) ¿Es d una métrica en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$? Justifique.

b) Demuestre que si

$$A_1 \subseteq A_2 \wedge B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

c) En el caso particular en que $A = \{x\}$ se define

$$d(x,B) = \text{ínf}\{\|x-y\| : y \in B\}$$

Pruebe que:

i) Si $x \in B \Rightarrow d(x,B) = 0$.

ii) Si $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow d(x, A_2) \leq d(x, A_1)$.

d) Pruebe que $d(x, \bar{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

e) Si F es cerrado, demuestre que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

f) Muestre que $d(A,B) = d(\bar{A}, \bar{B})$.

g) Pruebe que $d(x,F) = d(x,\bar{F})$.

P2. Es sabido que si E es un evn de dimensión finita, toda función lineal $L : E \longrightarrow F$ es continua, donde F es un evn cualquiera. Cuando E es de dimensión infinita, esto no ocurre necesariamente. Para probar esto, considere $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, dotado de la norma

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$$

a) Verifique que $\|\cdot\| : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una norma.

b) Sea $L : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(p) = p(3)$. Pruebe que L es lineal.

c) Sea $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$, tal que $p_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Muestre que $\|p_k\| \longrightarrow 0$ pero $|L(p_k)| \longrightarrow \infty$. Concluya.

P3. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Pruebe que el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es cerrado. Determínelo explícitamente.

b) Estudie el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^2}$.

c) Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

i) Calcule y dibuje las curvas de nivel de f.

ii) Utilizando las curvas de nivel calculadas en *i*), pruebe que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

P4. *a*) Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = f(g(xy), f(y^2, x))$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. Calcule las derivadas parciales de F.

b) Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ningún punto. A partir de ϕ, se define $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x,y) = \phi(x)y$.

i) Pruebe que existe alguna función ϕ con la propiedad anterior. (De un ejemplo)

ii) Calcule las derivadas parciales de f para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

iii) ¿Es f diferenciable en (0,0)? Justifique.

TIEMPO: 3 HORAS