MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 7

Martes 29 de Abril de 2010

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que sus derivadas parciales satisfacen que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq K$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}K||x-y||_2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

P2. Sea $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en $x_0 \in int(D)$, donde $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}$. Se define la función $h : int(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a) Pruebe que h es diferenciable en x_0.

b) Pruebe que

$$\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}$$

P3. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y direccionales, y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ii)

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P4. Sea $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, tal que existen las derivadas parciales y son continuas. Sean $g : U \longrightarrow [a,b]$ y $h : U \longrightarrow [a,b]$, ambas de clase $\mathcal{C}^1(U)$. Se definen

$$\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(x,t)\,dt \qquad \psi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt$$

a) Calcule $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Calcule $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Calcule $\phi'(\alpha)$ para $\alpha \neq 0$, donde $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\,dx$.