MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 6

Martes 27 de Abril de 2010

P4. *a*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si, existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0 \rangle$.

Solución:

$\Rightarrow$) Si f es diferenciable en x_0, entonces $f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \epsilon(h)$, donde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\epsilon(h)}{||h||} = 0$. Sea $h = x - x_0$, es decir, $f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \epsilon(x - x_0)$, con $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\epsilon(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$. Llamemos $\dfrac{\epsilon(x - x_0)}{||x - x_0||} = \epsilon_1(x - x_0)$, y reescribiendo la relación anterior obtenemos que

$$f(x) - f(x_0) = \left\langle \nabla f(x_0) + \frac{(x - x_0)\epsilon_1(x - x_0)}{||x - x_0||}, x - x_0 \right\rangle$$

Probaremos que la siguiente función es continua:

$$g(x) = \begin{cases} \nabla f(x_0) + \dfrac{(x - x_0)\epsilon_1(x - x_0)}{||x - x_0||} & \text{si } x \neq x_0 \\ \\ \nabla f(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

En efecto, $\lim\limits_{x \to x_0} ||g(x) - g(x_0)|| = \lim\limits_{x \to x_0} ||\dfrac{(x - x_0)\epsilon_1(x - x_0)}{||x - x_0||}|| = \lim\limits_{x \to x_0} ||\epsilon_1(x - x_0)|| = 0$, y por tanto esa es la g que se buscaba.

$\Leftarrow$) Sea $g : \Omega :\to \mathbb{R}$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0 \rangle$. Manipulando un poco la expresión se tiene que:

$$f(x) - f(x_0) = ||x - x_0|| \left\langle g(x) - g(x_0), \frac{x - x_0}{||x - x_0||} \right\rangle + \langle g(x_0), x - x_0 \rangle$$

Llamando $\epsilon_1(x - x_0) = \left\langle g(x) - g(x_0), \dfrac{x - x_0}{||x - x_0||} \right\rangle$ tenemos que

$$f(x) - f(x_0) = \langle g(x_0), x - x_0 \rangle + ||x - x_0||\epsilon_1(x - x_0)$$

y además $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon_1(x - x_0) = 0$ (esto proviene de sandwich, Cauchy-Schwarz y la continuidad de g). Luego, que f es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) = g(x_0)$.