MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 6

Martes 27 de Abril de 2010

P1. Considere el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, provisto de la norma $||(x,y)|| = \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $B(x,y) = \langle L(x), y\rangle$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^m$.

a) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq C||x||||y||$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

b) Demuestre que $\forall (x,y),(w,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, se tiene que $B((x,y)+(w,z)) = B(x,y) + B(x,z) + B(w,y) + B(w,z)$.

c) Demuestre que B es continua para cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

d) Desmuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y se tiene que $DB_{x_0,y_0}(w,z) = B(w,y_0) + B(x_0,z)$.

P2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $A = [a,b] \times [c,d]$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ es continua en en A. Pruebe que

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx$$

P3. *a*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si, existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ continua en x_0, tal que $f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0\rangle$.

b) Muestre que la existencia de todas las derivadas direccionales de f en x_0 (según direcciones no nulas) no es una condición necesaria ni tampoco suficiente para que f sea continua en x_0.

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine las direcciones en que f tiene derivada direccional en $a = (0,0)$.

b) Determine si f es diferenciable en $a = (0,0)$.

P5. Estudie la diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales en el origen de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2+xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$