MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta auxiliar 5

Martes 20 de Abril de 2010

P3. Sea E un espacio vectorial normado, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$. Probar entonces que, o bien, $f(x) < 0$, $\forall x \in E$ o $f(x) > 0$, $\forall x \in E$. ¿Seguirá siendo válida la afirmación si cambiamos E por la bola unitaria?

Solución:

Lo haremos por contradicción. Supongamos que existen $a, b \in E$ tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, y tomemos el conjunto $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\}$. Consideremos ahora $c = \dfrac{a+b}{2} \in [a, b]$, pues es combinación convexa de a y b, y evaluamos $f(c)$. Si $f(c) < 0$, consideremos $I_1 = [a_1, b_1] = [c, b]$, y si $f(c) > 0$, nos quedamos con $I_1 = [a_1, b_1] = [a, c]$. Ahora, sea $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, y evaluamos $f(c_1)$. Si $f(c_1) < 0$, consideremos $I_2 = [a_2, b_2] = [c_1, b_1]$, y si $f(c) > 0$, nos quedamos con $I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. Si repetimos este proceso, obtenemos dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $||a_n - b_n|| = \dfrac{||a-b||}{2^n}$, y por lo tanto, $||a_n - b_n|| \longrightarrow 0$. Probaremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy (para $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la demostración es análoga). Sea $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$. Luego

$$||a_m - a_n|| = ||\sum_{i=n}^{m-1}(a_{i+1} - a_i)|| \leq \sum_{i=n}^{m-1} ||a_{i+1} - a_i|| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{m-n-1}\frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

Si tomamos n tal que $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$, entonces $||a_m - a_k|| < \epsilon$, $\forall m, k \geq n$, y por lo tanto es de Cauchy. Consideremos ahora la función $f : [0, 1] \longrightarrow E$ tal que $f(t) = ta + (1-t)b$. Esta función es continua, y como $[0, 1]$ es compacto, entonces $f([0, 1]) = [a, b]$ es compacto también. Tenemos asi que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ es una sucesión de Cauchy en un compacto, y por lo tanto $a_n \longrightarrow a^*$. En particular, como $[a, b]$ es compacto, es cerrado, de donde obtenemos que $a^* \in [a, b]$. Recopilando, tenemos dos sucesiones $a_n \longrightarrow a^*$ y $b_n \longrightarrow b^*$, tales que $||a_n - b_n|| \longrightarrow 0$; es decir, $a^* = b^* = l$, pues $||a_n - b_n|| \longrightarrow ||a^* - b^*|| = 0$. Finalmente, como las sucesiones están construidas de modo que $f(a_n)f(b_n) < 0$, tomando límite obtenemos que $[f(l)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$, lo cual es un absurdo, pues $f(x) \neq 0$ $\forall x \in E$. Se tiene entonces que $f(x) < 0$, $\forall x \in E$ o bien $f(x) > 0$, $\forall x \in E$.

Nótese que lo que se usó para la demostración era la convexidad del espacio vectorial E, y dado que la bola unitaria también es convexa, la demostración es la misma.

P4. Sean E, F dos espacios topológicos. Diremos que $f : E \longrightarrow F$ es un homeomorfismo si satisface las siguientes condiciones:

- f es una biyección.
- f es continua.
- f^{-1} es continua.

Pruebe que la bola unitaria abierta de un espacio vectorial normado E es homeomorfa a todo el espacio E, es decir, que existe un homeomorfismo entre ambos.

Indicación: Considere la aplicación $f(x) = \dfrac{x}{1 + ||x||}$.

Solución:

Consideremos la función $f : E \longrightarrow B(0,1)$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{1+||x||}$. Notemos que para todo $x \in E$ se tiene que $f(x) \in B(0,1)$, pues

$$||f(x)|| = \left|\left|\frac{x}{1+||x||}\right|\right| = \frac{||x||}{1+||x||} < 1$$

y por lo tanto está bien definida. Ahora veamos que es continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y $x_0 \in E$

$$\begin{aligned}
||f(x) - f(x_0)|| &= \left|\left|\frac{x}{1+||x||} - \frac{x_0}{1+||x_0||}\right|\right| \\
&= \frac{||x - x_0 + ||x_0||x - ||x||x_0||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&\leq \frac{||x-x_0|| + ||x||x_0|| - ||x||x_0||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&= \frac{||x-x_0|| + ||x||x_0|| - x_0||x_0|| + x_0||x_0|| - ||x||x_0||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&= \frac{||x-x_0|| + ||(x-x_0)||x_0|| + x_0(||x_0|| - ||x||)||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&\leq \frac{||x-x_0|| + ||x-x_0|| \cdot ||x_0|| + ||x_0|| \cdot |\|x_0\| - \|x\||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&\leq \frac{||x-x_0|| + ||x-x_0|| \cdot ||x_0|| + ||x_0|| \cdot ||x-x_0||}{(1+||x||)(1+||x_0||)} \\
&= \frac{1+2||x_0||)}{(1+||x||)(1+||x_0||)}||x-x_0||
\end{aligned}$$

Luego, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon(1+||x||)(1+||x_0||)}{1+2||x_0||}$, tenemos que

$$||x-x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leq \frac{1+2||x_0||)}{(1+||x||)(1+||x_0||)}||x-x_0|| < \epsilon$$

y por lo tanto f es continua.

Probemos que es sobreyectiva. Dado un $y \in B(0,1)$, debemos encontrar un $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Para ello tomamos $x = \dfrac{y}{1-||y||}$, y vemos que

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-||y||}\right) = \frac{\frac{y}{1-||y||}}{1+\left|\left|\frac{y}{1-||y||}\right|\right|} = \frac{\frac{y}{1-||y||}}{1+\frac{||y||}{1-||y||}} = \frac{\frac{y}{1-||y||}}{\frac{1}{1-||y||}} = y$$

y por lo tanto es sobreyectiva. Para la inyectividad, tomemos $x, y \in E$ tales que $f(x) = f(y)$. Luego

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= f(y) \\
&\Rightarrow & \frac{x}{1+||x||} &= \frac{y}{1+||y||} \\
&\Rightarrow & \left|\left|\frac{x}{1+||x||}\right|\right| &= \left|\left|\frac{y}{1+||y||}\right|\right| \\
&\Rightarrow & ||x|| + ||x|| \cdot ||y|| &= ||y|| + ||y|| \cdot ||x|| \\
&\Rightarrow & ||x|| &= ||y||
\end{aligned}$$

Tenemos asi que $\dfrac{x}{1+||x||} = \dfrac{y}{1+||y||} = \dfrac{y}{1+||x||}$, pues $f(x) = f(y)$ y $||x|| = ||y||$, y por lo tanto al multiplicar la igualdad por $(1+||x||)$ obtenemos que $x = y$. Probamos entonces que es inyectiva, y como también es sobreyectiva, concluimos que es biyectiva. Como la inversa existe, queda propuesto ver

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - ||y||}$$

y que es continua. Esto último se prueba de manera análoga a lo hecho para f.