MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta auxiliar 4

Miércoles 21 de Abril de 2010

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos espacios vectoriales normados, $f : E \longrightarrow F$ y $x_0 \in E$. Diremos que f es *continua* en x_0 si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ ||x - x_0||_E < \delta \ \Rightarrow\ ||f(x) - f(x_0)||_F < \epsilon$$

lo cual equivale a

$$\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \ \text{ tal que } \ x_n \longrightarrow x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

P2. Sean $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $T : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ definida por

$$T[f](s) = \int_a^b K(s, t)f(t)\ dt \qquad \forall s \in [a, b]$$

a) Pruebe que T está bien definida, es decir, que $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ se tiene que $T[f] \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

<u>Solución:</u>

Dada $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, debemos probar que $T[f] \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Tomemos $\epsilon > 0$. Dado que la función $K(\cdot, t)$ es continua (pues es la restricción de una función continua), entonces $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |K(x, t) - K(x_0, t)| < \frac{\epsilon}{C(b - a)}$$

donde $C = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)| = \|f\|_\infty$. Usando el δ anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
|T[f](x) - T[f](x_0)| &= \left|\int_a^b (K(x, t) - K(x_0, t))f(t)\ dt\right| \\
&\leq \int_a^b |K(x, t) - K(x_0, t)| \cdot |f(t)|\ dt \\
&\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{C(b - a)} \cdot C\ dt \\
&= \frac{\epsilon}{b - a}\int_a^b dt = \epsilon
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $T[f]$ es continua, y por lo tanto está bien definida.

b) Pruebe que $T : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ es continua. ¿Seguirá siendo continua si consideramos la norma $||\cdot||_\infty$ en el espacio de llegada? ¿Por qué?.

<u>**Solución:**</u>

Claramente el operador $T(\cdot)$ es lineal. Por lo tanto, para probar que es continuo, demostraremos que $\|T[f]\|_1 \leq M\|f\|_\infty$, para todo $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y para algún $0 < M < \infty$. En efecto,

$$|T[f](x)| \leq \int_a^b |K(x,t)|\cdot|f(t)|\ dt \leq \int_a^b \|K\|_\infty \cdot \|f\|_\infty\ dt = \|K\|_\infty\|f\|_\infty(b-a)$$

Luego, $\|T[f]\|_1 = \displaystyle\int_a^b |T[f](x)|\ dx \leq \int_a^b \|K\|_\infty\|f\|_\infty(b-a)\ dt = \|K\|_\infty(b-a)^2\|f\|_\infty$, y por lo tanto vemos que para $M = \|K\|_\infty(b-a)^2$ se satisface $\|T[f]\|_1 \leq M\|f\|_\infty$, de donde se concluye que $T : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ es continuo. Ahora bien, si en vez de integrar, tomamos supremo, tenemos que

$$\sup_{x\in[a,b]} |T[f](x)| \leq \|K\|_\infty(b-a)\|f\|_\infty$$

y por lo tanto $\|T[f]\|_\infty \leq \|K\|_\infty(b-a)\|f\|_\infty$. Nuevamente, si tomamos $M' = \|K\|_\infty(b-a)$, tenemos que $\|T[f]\|_1 \leq M'\|f\|_\infty$, de donde tiene que $T : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es también continuo.

c) Pruebe que $I = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : T[f] = f\}$ es cerrado para la norma $||\cdot||_\infty$.

<u>**Solución:**</u>

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$, tal que $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$. Debemos probar que $f \in I$. En efecto,

$$\begin{aligned}
0 \leq \|T[f]-f\|_\infty &= \|T[f]-T[f_n]+T[f_n]-f_n+f_n-f\|_\infty \\
&\leq \|T[f]-T[f_n]\|_\infty + \|T[f_n]-f_n\|_\infty + \|f_n-f\|_\infty \\
&= \|T[f-f_n]\|_\infty + \|T[f_n]-f_n\|_\infty + \|f_n-f\|_\infty \\
&\leq \|T\|\|f-f_n\|_\infty + \|f_n-f\|_\infty \\
&= (\|T\|+1)\|f-f_n\|_\infty \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

es decir, $\|T[f]-f\|_\infty = 0$, y por lo tanto $T[f] = f$. Luego, $f \in I$, probando asi que I es cerrado.