MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 5

Martes 20 de Abril de 2010

P1. Sea $f : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y asuma que $||f||_\infty \leq C$ para una constante $C > 0$.
Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y r un real tal que:

$$|r| < \frac{1}{C(b-a)}$$

muestre que existe una única función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$h(x) = g(x) + r \int_a^b f(t,x)h(t)\ dt$$

P2. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real. Para $A \subseteq H$ se define el conjunto ortogonal a A como

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}$$

Pruebe que $\forall A \subseteq H$ se tiene que $A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.

P3. Sea E un espacio vectorial normado, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$. Probar entonces que, o bien, $f(x) < 0$, $\forall x \in E$ o $f(x) > 0$, $\forall x \in E$. ¿Seguirá siendo válida la afirmación si cambiamos E por la bola unitaria?

P4. Sean E, F dos espacios topológicos. Diremos que $f : E \longrightarrow F$ es un homeomorfismo si satisface las siguientes condiciones:

- f es una biyección.
- f es continua.
- f^{-1} es continua.

Pruebe que la bola unitaria abierta de un espacio vectorial normado E es homeomorfa a todo el espacio E, es decir, que existe un homeomorfismo entre ambos.

Indicación: Considere la aplicación $f(x) = \dfrac{x}{1 + ||x||}$.