MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 4

Jueves 15 de Abril de 2010

Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos espacios vectoriales normados, $f : E \longrightarrow F$ y $x_0 \in E$. Diremos que f es *continua* en x_0 si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ ||x - x_0||_E < \delta \ \Rightarrow\ ||f(x) - f(x_0)||_F < \epsilon$$

lo cual equivale a

$$\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \ \text{ tal que } \ x_n \longrightarrow x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

P1. *i*) Determine a de modo que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continua en todo $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + x^2 + y^2) + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ii) Demuestre usando la definición $\epsilon - \delta$, que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} xy = 12$.

P2. Sean $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $T : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ definida por

$$T[f](s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\ dt \qquad \forall s \in [a,b]$$

a) Pruebe que T está bien definida, es decir, que $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ se tiene que $T[f] \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

b) Pruebe que $T : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ es continua. ¿Seguirá siendo continua si consideramos la norma $||\cdot||_\infty$ en el espacio de llegada? ¿Por qué?.

c) Pruebe que $I = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : T[f] = f\}$ es cerrado para la norma $||\cdot||_\infty$.

P3. Sea $L : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $L(f) = \displaystyle\int_0^1 g(x) f(x)\ dx$, donde $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ es fija. Pruebe que L es continua.