MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Tarea 1

Fecha de entrega: Martes 13 de abril, al comienzo de la clase auxiliar.

P1. Sea $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función y es continua}\}$. Dadas $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$:

a) Pruebe que las siguientes funciones son métricas:

- $d_1(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$
- $d_2(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\ dx$
- $d_3(f,g) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\ dx}$

b) Pruebe que $d_1(f,g) \geq d_3(f,g) \geq d_2(f,g)$

P2. Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Pruebe que $\forall x, y, z, w \in X$, se tiene

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$$

b) Deduzca que $\forall x, y, z \in X$, se tiene

$$|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z)$$

P3. Sea A un conjunto, y $F = \{B \subseteq A : |B| < \infty\}$. Considere la función $d : F \times F \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$d(B_1, B_2) = |B_1 \Delta B_2|$$

Pruebe que d es métrica sobre F.

P4. Estudie si las siguientes funciones son normas en $\mathbb{R}^2$:

a) $||(x,y)|| = \sqrt{4x^2 + y^2}$

b $||(x,y)|| = \sqrt{|x| + |y|}$

c) $||(x,y)|| = |x| + |\sqrt[3]{x^3 + y^3}|$

d) $||(x,y)|| = \sqrt{(x-y)^2 + y^2}|$

P5. Sea E un conjunto no vacío. Una función $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ultramétrica si y solo si:

i) $\forall x, y \in E$, $d(x, z) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

a) Pruebe que toda ultramétrica es una métrica. Además, pruebe que la métrica discreta es una ultramétrica.

A continuación, considere el espacio E dotado de la ultramétrica d.

b) Pruebe que $\forall x, y, z \in E$, $d(x, y) > d(y, z) \Rightarrow d(x, y) = d(x, z)$. Deduzca que " todo triángulo en (E, d) es isósceles ".

c) Pruebe que para cualquier $y \in E$ fijo, y $r > 0$ también fijo, se tiene que $S = \{x \in E : d(x, y) = r\}$ es un abierto. Deduzca que en el caso $E = \mathbb{R}^n$, una ultramétrica no puede ser equivalente a la métrica euclideana.

P6. Sea $l_1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$. Considere $d : l_1 \times l_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

Pruebe que (l_1, d) es un espacio métrico.

P7. Sea $l_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada$\}$. Considere $d : l_\infty \times l_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

Pruebe que (l_∞, d) es un espacio métrico.

P8. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices de 2×2. Se define la función $||\cdot||_\infty : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| \right\}$$

a) Pruebe que $||\cdot||_\infty$ es norma en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Estudie la convergencia de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$A_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P9. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn. Definamos $||x||_L = ||L(x)||$, donde L es una función lineal de E en E, y además $L(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Pruebe que $||\cdot||_L$ es una norma sobre E.

P10. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Pruebe que es acotada.

P11. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Pruebe que si la sucesión posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge a ese punto.

P12. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $F \subseteq E$. Diremos que F es compacto, si para toda sucesion de elementos en F, esta posee una subsucesión convergente a un elemento en F.

a) Pruebe que todo compacto en un evn es cerrado y acotado.

b) Pruebe que todo subconjunto cerrado de un compacto, es compacto también.

c) Sea $E = \mathbb{R}^n$. Pruebe que todo cerrado y acotado es compacto.

P13. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $A \subseteq E$. Consideremos $\Theta = \{\mathcal{O} \subseteq A : \mathcal{O} \text{ es abierto}\}$. Pruebe que $int(A) = \bigcup_{\mathcal{O}\in\Theta} \mathcal{O}$, es decir, el interior de A es la unión de todos los abiertos contenidos en A.

P14. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $A \subseteq E$. Consideremos $\Pi = \{F \supseteq A : F \text{ es cerrado}\}$. Pruebe que $adh(A) = \bigcap_{F\in\Pi} F$, es decir, la adherencia de A es la intersección de todos los cerrados que contienen a A.

P15. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en un compacto de E. Pruebe que la sucesión converge.

P16. Sea $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia decreciente de compactos (ie, $C_{i+1} \subseteq C_i$), no vacíos, en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.

P17. Consideremos el evn $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$. Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ un real fijo, se llama distancia de $x \in \mathbb{R}^n$ a C a

$$d(x, C) = \inf\{||x - c|| : c \in C\}$$

Sea $C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, C) < r\}$. Pruebe que C_r es abierto.

P18. Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ y $B = A \cup \{0\}$. Pruebe que A no es abierto ni cerrado, y que B es cerrado.

P19. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $x \in E$ fijo. Se define la distancia de x a $A \subseteq E$ como $d_A(x) = \inf\{||x - y|| : y \in A\}$. Pruebe que $adh(A) = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$.

P20. Considere el espacio $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$. Para cada conjunto A, determine interior, adherencia y frontera. Indique si son abiertos o cerrados, y dibuje cada conjunto.

a) $A = \{(x_1, x_2) : x_1 \cdot x_2 = 0\}$

b) $A = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

c) $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 < 1\}$

c) $A = \{(x_1, x_2) : |x_2| < 1,\ x_1 \leq x_2\}$

P21. Sea el evn $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$. Pruebe que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| = 1\}$ es cerrado.

P22. Para los siguientes conjuntos, determine interior adherencia y frontera.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$

b) $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n + 1)$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$

P23. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, tal que A es abierto. Pruebe que $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ es abierto, sin importar la naturaleza de B.

P24. Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dirá Lipschitziana en A si existe una constante $k > 0$, llamada constante de Lipschtiz, tal que $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$, $\forall x, y \in A$.

Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dirá contractante en A, si es Lipschitziana con constante de Lipschitz $k < 1$.

i) ***Teorema del punto fijo de Banach***

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to A$ es contractante, y A cerrado, entonces existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = a$. El elemento a, se llama punto fijo de f en A. Para probar este teorema, considere un $a_0 \in A$ cualquiera, y considere la sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que $||a_{n+1} - a_n|| \leq k^n ||a_1 - a_0||$.

b) Pruebe que $||a_{n+p} - a_n|| \leq \dfrac{k^n}{1-k}||a_1 - a_0||$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

c) Demuestre que $\exists a \in A$ tal que $a_n \longrightarrow a$, y $f(a) = a$.

d) Pruebe que a es único.

P25. Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios a coeficientes reales. Considere las siguienets aplicaciones:

i) $N_\infty : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $N_\infty(p) = \sup\limits_{0 \leq i \leq q} |a_i|$, donde $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{q} a_i x^q$.

ii) $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(p) = p(1)$.

a) Mostrar que N_∞ es una norma sobre E.

b) Mostrar que Φ es lineal.

c) Considere la familia de polinomios $p_n(x) = 1 + x^2 + \ldots + x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Cacule $N_\infty(p_n)$ y $\Phi(p_n)$.

d) Deduzca que Φ no es continua en (E, N_∞).

e) Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Considere el subespacio vectorial $F = \mathbb{R}_k[X]$ de E correspondiente a los polinomios de grado menor o igual a k. Se dota a F de la norma N_∞ y se considera $\Phi|_F$ la restricción de Φ a F, es decir, $\Phi|_F : F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(p) = p(1)$. Pruebe que $\Phi|_F$ es continua.

P26. Considere el espacio de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sean $M, N \subseteq H$ subespacios cerrados. Suponga que $M \perp N$, es decir, $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall x \in M$ y $\forall y \in N$. Sea $M + N = \{z \in H : \exists x \in M, \exists y \in N \text{ tal que } z = x + y\}$. Pruebe que $M + N$ es cerrado.

P27. Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ a coeficientes reales. Se define para $A, B \in E$ la función

$$\langle A, B\rangle = Tr(AB^t)$$

donde $Tr(\cdot)$ es la traza de una matriz, y B^t es la matriz traspuesta de B. Pruebe que esta función es un producto interno en E.

P28. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en la bola unitaria abierta $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow 1$. Pruebe que $||x_n - y_n|| \longrightarrow 0$.

P29. Demuestre que la norma en un espacio vectorial E, que proviene de un producto interno, verifica la igualdad del paralelógramo

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad \forall x, y \in E$$

Además pruebe que si E es un evn sobre $\mathbb{R}$, entonces se cumple la identidad polar, es decir

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

P30. Consideremos el espacio de Banach $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, tal que $||f - f_n||_\infty \longrightarrow 0$. Pruebe que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)\ dx$$