MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta Auxiliar 2

Martes 6 de Abril de 2010

P1. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn. Demuestre que:

a) Si $x_0 \in E$ y $r > 0$, entonces $B(x_0, r) = \{x \in E : ||x - x_0|| < r\}$ es abierto.

Dado $x \in B(x_0, r)$, se tiene que $||x_0 - x|| < r$. Escojamos entonces, un $\hat{r} > 0$ de modo que $\hat{r} < r - ||x_0 - x||$, y probemos que $B(x, \hat{r}) \subset B(x_0, r)$. En efecto,

$$\begin{aligned} y \in B(x,\hat{r}) &\Rightarrow ||x-y|| < \hat{r} \\ &\Rightarrow ||x-y|| < r - ||x_0 - x|| \\ &\Rightarrow ||x-y|| + ||x_0 - x|| < r \\ &\Rightarrow ||x_0 - y|| < r \\ &\Rightarrow y \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

de donde se prueba que $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto. Ojo: de la tercera a la cuarta implicancia se utilizó la desigualdad triangular.

b) Si $(E, ||\cdot||)$ un espacio de Banach, y $F \subseteq E$ un conjunto cerrado, entonces el sevn $(F, ||\cdot||)$ también es de Banach.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ una sucesión de Cauchy. Luego, es de Cauchy también en $(E, ||\cdot||)$, y como este espacio es de Banach, $x_n \longrightarrow x$, para algún $x \in E$. Pero F es cerrado, y como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, su límite está en F, es decir, $x \in F$. Concluimos entonces que para toda sucesión de Cauchy en $(F, ||\cdot||)$, estas convergen en F, y por lo tanto es de Banach.

c) Si $x_0 \in E$, entonces $\{x_0\}$ es cerrado.

Esto es directo del siguiente hecho:

Un conjunto A de un evn $(E, ||\cdot||)$, es cerrado si y solo si toda sucesión convergente de elementos en A posee su límite en A.

P2. Determine la falsedad o veracidad de las siguientes aseveraciones en $\mathbb{R}^n$. Justifique en cada caso.

1) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = int(adh\ E)$.

Falso: Basta tomar un $E \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, pues $int(adh\ E) = int(E) \neq E$. Por ejemplo, consideremos $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $int(adh\ E) = (0, 1) \neq [0, 1]$.

2) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = adh(int\ E)$.

Falso: Basta tomar un $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, pues $adh(int\ E) = adh(E) \neq E$. Por ejemplo, consideremos $E = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $adh(int\ E) = [0, 1] \neq (0, 1)$.

3) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = int\ (E) \cup \partial E$

Falso: Consideremos $E = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, dotado de la norma $|\cdot|$. Claramente $int\ (E) \cup \partial E = (0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1] \neq (0, 1]$.

4) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $int\ (E^c) = (adh\ E)^c$

Verdadero: Probemos ambas inclusiones:

$\subseteq$) Sea $x \in int\ (E^c)$. Luego, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $B(x, \delta) \subset E^c$, es decir, $B(x, \delta) \cap E = \emptyset$. Tenemos asi que x no es punto adherente a E y por lo tanto $x \in (adh\ E)^c$.

$\supseteq$) Sea $x \in (adh\ E)^c$. Entonces, existe $\rho \in \mathbb{R}$, tal que $B(x, \rho) \cap E = \emptyset$, es decir, $B(x, \rho) \subset E^c$. Tenemos asi que x es punto interior de E^c y por lo tanto $x \in int\ (E^c)$.

P3. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $A \subseteq E$ un abierto. Pruebe que $int(\partial A) = \emptyset$.

Supongamos que $int(\partial A) \neq \emptyset$. Entonces, existe $x_1 \in int(\partial A)$, y como este conjunto es abierto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B(x_1, \epsilon_1) \subset int(\partial A) \subseteq \partial A$. Por definición de ∂A, tenemos que $B(x_1, \epsilon_1) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x_1, \epsilon_1) \cap A^c \neq \emptyset$, y por lo tanto existe $x_2 \in B(x_1, \epsilon_1) \cap A$. Se sigue que $x_2 \in B(x_1, \epsilon_1) \subset \partial A$ y $x_2 \in A$. Como A es abierto, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $B(x_2, \epsilon_2) \subset A$, es decir, $B(x_2, \epsilon_2) \cap A^c = \emptyset$. Pero esto contradice el hecho de que $x_2 \in \partial A$, puesto que debería ser $B(x_2, \epsilon_2) \cap A^c \neq \emptyset$. Se concluye entonces que $int(\partial A) = \emptyset$.

P4. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Pruebe que $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.

Es directo que $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio vectorial. Lo que probaremos, es que dada una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, existe $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a f, es decir, $||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$.

Consideremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, y $x_0 \in [a, b]$ un real fijo. Probemos que la sucesión $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$ se tiene que $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. Entonces,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| = ||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$$

lo cual prueba que $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es de Banach, existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x_0) - y_0| \longrightarrow 0$. Puesto que esto vale para cualquier $x_0 \in [a, b]$, podemos definir la función

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

A continuación, probaremos que $||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n, m \geq n_0$ se tiene $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. Luego,

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ \forall n, m \geq n_0 \ \ |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m|| < \epsilon$$

y haciendo $m \to \infty$ tenemos que $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Tomando supremo sobre los $x \in [a, b]$ se concluye que $\forall n \geq n_0$ $||f_n - f|| < \epsilon$, y por lo tanto $||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$.

Lo único que resta probar, es que $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Sea $x_0 \in [a, b]$. Por la convergencia uniforme, sabemos que

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ \exists n_0 \ \text{ tal que } \ \forall n, m \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Si $n \geq n_0$, entonces f_n es continua en x_0, y por lo tanto

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow \; |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Por último, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Hemos probado entonces que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.

P5. Sea $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ y la siguiente sucesión decreciente de funciones continuas dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $||\cdot||_1$-Cauchy, pero que no converge. Para ello, pruebe y utilice que

$$\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| \leq \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1}$$

para todo $n, h \in \mathbb{N}$. Determine además el límite puntual de la sucesión. ¿Qué sucede en $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$? ¿Converge? ¿Es de Cauchy? justifique. ¿Son equivalentes dichas normas sobre $\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R})$?

Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$ se tiene $||f_m - f_n||_1 < \epsilon$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m > n$. Luego, $m = n + h$, con $h \in \mathbb{N}$. Probemos la indicación:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f_{n+h} - f_n| &= \int_0^1 |f_{n+h} - f_n| + \int_1^2 |f_{n+h} - f_n| \\ &= \int_0^1 |x^{n+h} - x^n| + \int_1^2 |1 - 1| \\ &= \int_0^1 |x^n||x^h - 1| \\ &\leq \int_0^1 |x^n| \\ &= \int_0^1 f_n \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Basta entonces considerar $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$, y por lo tanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $||\cdot||_1$-Cauchy. Ahora, es claro que la sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, es decir, en $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Dado que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, y esta última no es a una función continua, se concluye que la sucesión no converge uniformemente. Como $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es de Banach, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es $||\cdot||_\infty$-Cauchy. Por último, como si es $||\cdot||_1$-Cauchy, se tiene que estas normas no son equivalentes en $\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R})$, y por lo tanto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $(\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R}), ||\cdot||_1)$.