MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 2

Martes 6 de Abril de 2010

P1. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn. Demuestre que:

a) Si $x_0 \in E$ y $r > 0$, entonces $B(x_0, r) = \{x \in E : ||x - x_0|| < r\}$ es abierto.

b) Si $(E, ||\cdot||)$ un espacio de Banach, y $F \subseteq E$ un conjunto cerrado, entonces el sevn $(F, ||\cdot||)$ también es de Banach.

c) Si $x_0 \in E$, entonces $\{x_0\}$ es cerrado.

P2. Determine la falsedad o veracidad de las siguientes aseveraciones en $\mathbb{R}^n$. Justifique en cada caso.

a) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = int(adh\ E)$.

b) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = adh(int\ E)$.

c) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $E = int\ (E) \cup \partial E$

d) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma, entonces $int\ (E^c) = (adh\ E)^c$

P3. Sea $(E, ||\cdot||)$ un evn, y $A \subseteq E$ un abierto. Pruebe que $int(\partial A) = \emptyset$.

P4. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Pruebe que $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.

P5. Sea $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), ||\cdot||_1)$ y la siguiente sucesión decreciente de funciones continuas dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $||\cdot||_1$-Cauchy, pero que no converge. Para ello, pruebe y utilice que

$$\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| \leq \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1}$$

para todo $n, h \in \mathbb{N}$. Determine además el límite puntual de la sucesión. ¿Qué sucede en $(\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$? ¿Converge? ¿Es de Cauchy? justifique. ¿Son equivalentes dichas normas sobre $\mathcal{C}([0,2], \mathbb{R})$?