MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 1

Martes 30 de Marzo de 2010

P1. Desigualdad de Holder:

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in \mathbb{R}$ Holder-conjugados, es decir, que $p \in [1, +\infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (cuando $p = 1$ considere $q = \infty$). Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

Para ello, puede serle útil probar primero que dados $a, b \geq 0$ y p, q Holder-conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

P2. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de n x n a valores reales. Llamaremos norma matricial, a una aplicación $|| \cdot || : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ tal que:

i) $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
ii) $||\lambda A|| = |\lambda| ||A||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
iv) $||AB|| \leq ||A|| ||B||$

a) Sea $N : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $N(A) = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Pruebe que $N(\cdot)$ **no** es una norma matricial.

b) Sea $|| \cdot ||_F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Pruebe que $|| \cdot ||_F$, llamada norma de Frobenius, es matricial.

Dada una norma matricial $|| \cdot ||$, pruebe las siguientes afirmaciones:

c) Si $||A - I|| < 1$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible.
d) Si B es invertible, y $||B - A|| \leq ||B^{-1}||^{-1}$, entonces A es invertible.

P3. Sea $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$, derivables, y con derivada continua. Considere $|| \cdot ||_E : E \to \mathbb{R}_+$ definida como $||f||_E = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

a) Pruebe que $|| \cdot ||_E$ es una norma.
b) Pruebe que $||f||_\infty \leq ||f||_E$, para todo $f \in E$. Recuerde que $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
c) Mostrar que no existe ninguna constante positiva C tal que $||f||_E \leq C ||f||_\infty$ para todo $f \in E$.
d) Concluya.