

Pauta Control 1

P3 (a) Sea $U \in M_n(\mathbb{R})$ unitario.

• Pdg: $\exists U^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tq $U^{-1}U = UU^{-1} = I$.

Asumiremos cierto al Teorema que si $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $BA = I$, entonces $AB = I$ y $B = A^{-1}$.

En efecto: Sea $U^{-1} = U^T$

$$(i) U^{-1}U = U^T U = I \quad / \text{def. matriz unitaria}$$

$$(ii) UU^{-1} = UU^T = I \quad / \text{Teorema.}$$

$\therefore U$ posee inversa $U^{-1} = U^T$

0,7 pto

• Pdg: $U^{-1} = U^T$ es unitaria.

en efecto:

$$(U^{-1})^T U^{-1} = (U^T)^T U^T$$

$$= UU^T$$

$$= I$$

/ por parte anterior

0,7 pto

• Pdg: $U_1 U_2$ es unitaria

$$(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) = (U_2^T U_1^T) (U_1 U_2) \quad / \text{propiedad}$$

$$= U_2^T (U_1^T (U_1 U_2)) \quad / \text{asociando}$$

$$= U_2^T ((U_1^T U_1) U_2) \quad / \text{asociando}$$

$$= U_2^T (I U_2)$$

/ U_1 unitaria

$$= U_2^T U_2$$

$$= I$$

/ U_2 unitaria

0,6 pto.

P2 (b) $H^T H = (I - 2uu^T)^T (I - 2uu^T)$, $u \in \mathbb{R}^n$

$$= (I^T - (2uu^T)^T)(I - 2uu^T)$$

$$= (I - (2uu^T)^T)(I - 2uu^T)$$

0,5pts

Ahora multiplicamos los parentesis:

$$H^T H = I^2 - I(2uu^T) - (2uu^T)^T I + (2uu^T)^T (2uu^T)$$

$$= I - 2uu^T - (2uu^T)^T + 4(uu^T)^T (uu^T)$$

$$= I - 2uu^T - 2(uu^T)^T + 4((u^T)^T u (uu^T))$$

$$= I - 2uu^T - 2uu^T + 4(u(u^T u)u^T)$$

$$= I - 4uu^T + 4uu^T$$

$$= I$$

$\therefore H$ es unitaria.

0,5pts

P.S: si usó la propiedad $(AB)^T = B^T A^T$.

~~$(A^T B)^T = A(B^T)$~~

~~$A_{m \times n} B_{n \times p} C_{p \times q}$~~

~~$(A^T B)^T = A(B^T)$~~

~~$A_{m \times n} B_{n \times p} C_{p \times q}$~~

~~$A_{m \times n} B_{n \times p}$~~

~~$A_{m \times n} B_{n \times p}$~~

~~$(A^T B)^T = A(B^T)$~~

~~$B^T A^T$~~

~~$B^T A^T$~~

P3 1(c) Sea $U \in M_{mm}(\mathbb{R})$ unitaria y triangular superior.

Por la parte (a), se sabe que $U^{-1} = U^T$

(i) Demostremos que

U triang. superior $\implies U^T$ triang. inferior.

en efecto: U triang. superior $\Leftrightarrow u_{ij} = 0, \forall i > j$

por definición, $(u^T)_{ij} = u_{ji} = 0, \forall j > i$

$\therefore (u^T)_{ij} = 0, \forall i < j$

$\Leftrightarrow U^T$ es triangular inferior.

0,5 pts

(ii) Usando la indicación, tenemos que

$U^{-1} = U^T$ es triangular superior.

$\therefore U^T$ es triangular superior e inferior simultáneamente.

0,3 pts

(iii) Demostremos que

A triang. sup. $\wedge A$ triang. inf. $\implies A$ diagonal.

en efecto: Sea $A \in M_{mm}(\mathbb{R})$, triangular sup. e. inf.

• Triangular superior: $a_{ij} = 0, \forall i > j$

• Triangular inferior: $a_{ij} = 0, \forall i < j$

$\therefore \forall i > j \vee i < j, a_{ij} = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \neq j, a_{ij} = 0$

$\Leftrightarrow A$ es diagonal.

$\Rightarrow$

0,5 pts

∴ U^T es matriz diagonal.

⇒ $U^T = U$ es diagonal.

0,2 pts

(iv) Determinemos los valores de u_{ii}

$$U^T U = I$$

$$\Leftrightarrow U \cdot U = I$$

$$U^2 = I$$

$$\Leftrightarrow u_{ii}^2 = 1, \text{ y como } (u^2)_{ii} = u_{ii}^2,$$

∴ si U es diagonal

0,3 pts

$$u_{ii}^2 = 1 \Leftrightarrow u_{ii} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

∴ Los elementos u_{ii} de la diagonal de U

sólo pueden tomar los valores del conjunto $\{-1, 1\}$

0,2 pts

~~$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} a+3b & c+3d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix}$$~~

~~$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & a+4c \\ b+2d & b+4d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & c+3b \\ 2a+4b & 2c+4b \end{pmatrix}$$~~