Pauta P1 – Control 1 MA1102
Otoño 2010

Sea el sistema:

$$A \cdot x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + 1/2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Analizar en función de los parámetros α y β los tipos de soluciones del sistema.

<u>Solución:</u>

Sea la matriz aumentada.

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + 1/2 & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz:

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{1,2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,3}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha & \vdots & 2+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} & \vdots & 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,4}(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2\alpha+2 & 4+\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha+\frac{1}{2} & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{2,5}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2\alpha+2 & 4+\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha+\frac{1}{2} & 2\beta+\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{E_{3,4}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 2\alpha+\frac{1}{2} & 2\beta+\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{E_{3,5}(-1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 2\beta+\alpha-1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{4,5}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta-1 \end{array}\right)$$

En base a esto, si $2\beta - 1 \neq 0$ o $\beta \neq {}^{1}/_{2}$ no existe solución ya que el sistema estaría sobre dimensionado. Si $\beta = {}^{1}/_{2}$ y $\alpha = 0$ existirán infinitas soluciones. Finalmente si $\beta = {}^{1}/_{2}$ y $\alpha \neq 0$ la solución será única.

Distribución de puntaje

Escalonamiento de la matriz (3 puntos). 0,4 por cada etapa, más 0,2 por el escalonamiento final completo. Si hay errores en los escalonamientos, se descuenta el puntaje de cada etapa errónea, más el correspondiente al escalonamiento final. No se consideran errores de arrastre.

Conclusiones (3 puntos). 1 punto por cada condición.