Auxiliar Extra Control 6 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Jueves 01 de Julio, 2010

Profesores Cátedra: Leonardo Sánchez - Pablo Navarrete
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Determine todos los morfismos que hay entre $(\mathbb{Z}_3, +)$ y $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Pregunta 2. Calcule:

a) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j-ésima raíz n-ésima de la unidad.

b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j-ésima raíz n-ésima de un complejo cualquiera.

Pregunta 3. Los complejos $z_1, \cdots, z_p$ son tales que $|z_i| = 1,\ \forall i \in \{1, \cdots, p\}$. Pruebe que si

$$\sum_{i=1}^{p} z_i = a \in \mathbb{R} \text{ entonces } \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a$$

Pregunta 4.

a) A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

b) Determine los menores naturales m, n tal que:

$$(\sqrt{3} - i)^m = (1+i)^n$$

Pregunta 5.

a) Sean $(w_j)_{j=0}^{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

b) Sea $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado m definido por:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

Demuestre que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$$

Pregunta 6.

a) Se define para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$: $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Pruebe que $D_n(x) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

b) Se define también para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$: $J_n(x) = \dfrac{D_0(x) + \cdots + D_{n-1}(x)}{n}$. Pruebe que

$J_n(x) = \dfrac{1}{n} \dfrac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$

Indicación: Calcule $nJ_n(x)$

Pregunta 7. Dado un polinomio $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ se define: $L(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$

a) Demuestre que si p y q son polinomios de grado n y m respectivamente entonces:

$$L(p \cdot q) = L(p) \cdot q + p \cdot L(q)$$

b) Pruebe por inducción sobre n, que si $p(x) = (x - d)^n$, entonces $L(p)(x) = n(x - d)^{n-1}$