Auxiliar Extra Control 4 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 02 de Junio, 2010

Profesores Cátedra: Leonardo Sánchez - Pablo Navarrete
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Orlando Rivera Letelier - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Calcule el valor de las siguientes sumas utilizando el teorema del binomio:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Indicación: Note que $k^2 = k(k-1)+k$

Pregunta 2.

a) Calcule el valor de la siguiente sumatoria:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}\cdot\frac{k}{(k+1)(k+2)}$

b) Determine el entero positivo n tal que:

$\displaystyle\frac{n^3-3}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-5}{n^3}+\cdots+\frac{5}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^3}=169$

Pregunta 3. Pruebe los siguientes resultados por inducción

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1-j}{k-j}=\binom{n}{k}$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$ con $k < n$.

b) Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0,\ldots,x_n) = \Psi_{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0,\ldots,x_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x_j$

Pregunta 4.

a) Sea A un conjunto numerable. Se define $\mathcal{F} = \{\ f : \{1,2,\ldots,n\} \to A \mid f \text{ es función } \}$ Demuestre que $|\mathcal{F}| = |\underbrace{A\times\ldots\times A}_{n \text{ veces}}|$ y concluya que $\mathcal{F}$ es numerable.

b) Sea A un conjunto tal que $|A| \geq 2$. Sea $F(A) = \{\ f : A \to A \mid f \text{ es función } \}$. Pruebe que $|F(A)| > |A|$

Indicación: Note que el caso finito es directo de a), para el caso infinito argumente por contradicción.

Pregunta 5. Sea E un conjunto numerable. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists\ f : A \to B,\ f \text{ biyectiva}$$

Se puede probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia (Propuesto). Pruebe entonces que la clase de equivalencia de un conjunto infinito $A \in \mathcal{P}(E)$, es la colección de los subconjuntos numerables de E, es decir $[A]_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq E \mid X \text{ es numerable}\}$. Indique, dos elementos distintos en $[A]_{\mathcal{R}}$, si $A \neq E$

Pregunta 6. Considere el conjunto:

$$\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$$

Pruebe que $\mathcal{N}$ es numerable.
<u>Indicación:</u> Considere los conjuntos $\mathcal{N}_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$.