Auxiliar Extra Control 2 - Introducción al Álgebra
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 22 de Abril, 2010

Profesores Cátedra: Pablo Navarrete - Leonardo Sánchez
Profesores Auxiliares: Victor Carmi Lara - Matías Godoy Campbell - Orlando Rivera Letelier

Pregunta 1. Considere las funciones $f, g : A \to B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \to B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.
Pruebe que φ es inyectiva.
Indicación: Recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$

Pregunta 2. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}.\ \Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.
c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

Pregunta 3.

a) Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$.
Pruebe que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$
b) Considere las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Pruebe que ambas son funciones biyectivas, pero sin embargo la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No es biyectiva.

Pregunta 4. Sea $f : A \to B$ una función. No necesariamente biyectiva.

a.1) Demuestre que:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \exists\ g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = id_A$$

a.2) Se define: $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ por $F(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) = \{f(x)\ /\ x \in \mathcal{X}\}$ = Imágen de $\mathcal{X}$.
Demuestre que: f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ F es sobreyectiva.
b.1) Pruebe que si f es sobreyectiva, entonces para cada $Y \subseteq B$, se tiene que:

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

b.2) Se define: $G : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ por $G(Y) = f^{-1}(Y) = \{f^{-1}(Y)\ /\ y \in Y\}$ = Pre-imágen de Y.
Demuestre que: G es inyectiva $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva.

Pregunta 5. Sea $f : X \to Y$, una función, entonces pruebe que para todo $A, B \subseteq X$

$$f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$$

Muestre además que si f es inyectiva, entonces:

$$f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$$