Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Soluciones Guía de Problemas Semana 8

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliares: Roberto Castillo, Rodolfo Núñez
Viernes 24 de Mayo de 2010

P1.-
Notando que $(1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{k-1}) = \frac{4^k-1}{3}$. Se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(1+4+4^2+\ldots+4^{k-1})\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{4^k-1}{3}\binom{n}{k} \\
\% &= \frac{1}{3}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}) \\
\% &= \frac{1}{3}(5^n-2^n)
\end{aligned}$$

P2.-
Se calcula:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i} &= 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k \\
\% &= 8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^i}9^i \\
\% &= 8\sum_{j=1}^{n}\sum i = 1^j 3^i \\
\% &= 8\sum_{j=1}^{n}\frac{3}{2}(3^j-1) \\
\% &= 12\sum_{j=1}^{n}(3^j-1) \\
\% &= 18(3^n-1)-12n
\end{aligned}$$

P3.-
Se tiene que claramente $\mathbb{N} \subseteq A$, pues si se toma un $n \in \mathbb{N}$, $n = \frac{n}{3^0}$, por lo que $n \in A$. Además se tiene

que $A \subseteq \mathbb{Q}$, pues todo x en A es escribe en la forma $x = \frac{k}{3^i}$ con k en $\mathbb{Z}$ e i en $\mathbb{N}$, con lo que es un número racional.
Así se concluye que A es un subconjunto infinito de un conjunto numerable y, por lo tanto, es numerable.

P4.-
Consideramos el conjunto $C_n = \{x \in [0, +\infty) | x^n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$, claramente se tiene que $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} C_n$. Cada uno de estos conjuntos es numerable, para ver esto basta definir la función $f_n : C_n \to \mathbb{N}$ que a cada x en C_n le asocia x^n. Esta función es sobreyectiva, pues para cada $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{k}$ está en C_n. Además es inyectiva, pues si se toman x_1 y x_2 en C_n, si se tiene que $x_1^n = x_2^n$, entonces es claro que $x_1 = x_2$.

P5.-
(a) Se tiene que basta hacer una biyección entre las rectas no-verticales que pasan por $(0, 1)$ y que cortan OX en una coordenada racional y los números racionales sin el cero (que es un conjunto numerable). La biyección es asociar a cada recta que cumple esta propiedad la abscisa de su intersección con el eje OX. Claramente esta función es biyectiva desde el conjunto de rectas descrito a $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, pues para cada racional distinto de cero q hay una única recta de la cual q es imagen, a saber, la recta de pendiente $-\frac{1}{q}$. Luego el conjunto es numerable
(b) Se define L_q como el conjunto de las rectas que pasan por el punto $(0, q)$ y que cortan al eje OX en una coordenada racional. Claramente una biyección análogoa a la utilizada en la parte anterior muestra que para cada racional q, este conjunto es numerable. Se tiene que el conjunto L de las rectas que intersectan al eje OX y al eje OY en una coordenada racional satisface que $L = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}} L_q$. Lo que muestra que L es unión numerable de conjuntos numerables y, por lo tanto, es numerable también.

P6.-
Se define $A_n = \{\frac{p}{2^n} | p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^n\}$, se observa que claramente $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y, como se tiene que $|A_n| = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que A es unión numerable de conjuntos finitos, y por lo tanto es numerable.

P7.-
Se supone que para cada l, j, con $l \neq j$, $x_j \neq x_l$. Se tiene entonces que el conjunto A tiene infinitos elementos distintos, pero se sabe que A tiene sólo n elementos, por lo que es imposible que todos los elementos de la secuencia sean distintos. Se concluye por contradicción que hay $l, j \in \mathbb{N}$, con $j \neq l$, tales que $x_l = x_j$.

P8.-
(a) Para demostrar que E es infinito. Se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, se puede tomar $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1) \in \{-1, 1\}^{2n}$ donde la cantidad de 1 al principio es n, al igual que la cantidad de -1. Así, tenemos una cantidad infinita de elementos, pues para cada natural distinto de cero, hay un elemento en E.
(b) Se define el conjunto $E_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{-1, 1\} | \sum_{i=1}^{n} a_i\}$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se observa que para n impar el conjunto es vacío, y que para n par la cantidad de elementos es finita (de hecho es $\binom{2n}{n}$). Por lo tanto, como $E = \bigcup_{n \geq 2} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} E_2 n$ es unión numerable de conjuntos finitos y no vacíos, por lo tanto es numerable.