

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Soluciones Guía de Problemas Semana 4

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: María Leonor Varas

Auxiliares: Roberto Castillo, Javiera Urrutia

Viernes 23 de Abril de 2010

P1.-

Dado que $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$, se tiene que $f(x) = 3x + 2$. En efecto:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= 3 \frac{x-2}{3} + 2 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f) &= \frac{3x + 2 - 2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x\end{aligned}$$

Ahora se observa que:

$$g \circ f(x) = \frac{3x + 2}{9x^2 + 12x + 5} = \frac{3x + 2}{(3x + 2)^2 + 1}$$

De lo que se concluye que $g = \frac{x}{x^2+1}$

P2.-

(a) \Rightarrow Si f es inyectiva se tiene que como g es biyectiva, en particular es inyectiva y la composición de funciones inyectivas es, asimismo, inyectiva.

\Leftarrow Si $f \circ g$ es inyectiva. Dados $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, por ser g biyectiva existen $y_1, y_2 \in A$ con $x_1 = g(y_1)$ y $x_2 = g(y_2)$. Se tiene entonces que $f \circ g(y_1) = f \circ g(y_2)$ y como $f \circ g$ es inyectiva, $y_1 = y_2$, por ser g una función, esto implica que $x_1 = x_2$.

(b) \Rightarrow Si f es sobreyectiva, como g es biyectiva, en particular es sobreyectiva y la composición de funciones sobreyectivas es, asimismo, sobreyectiva.

\Leftarrow Si $g \circ f$ es sobreyectiva, dado que g es biyectiva, existe su inversa g^{-1} y ésta es biyectiva. Observando que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, se concluye que f es sobreyectiva por ser composición de funciones sobreyectivas.

Nota: Observe que este mismo argumento puede ser utilizado para probar \Leftarrow en la parte (a).

P3.-

- (a) Se tiene que claramente la función \bar{f} va de A en \mathbb{R} , luego basta probar que se cumple que $\bar{f}(0) + \bar{f}(1) + \bar{f}(2) + \bar{f}(3) = 0$, veamos que esto es cierto:

$$\begin{aligned}\bar{f}(0) + \bar{f}(1) + \bar{f}(2) + \bar{f}(3) &= f \circ T(0) - f(0) + f \circ T(1) - f(1) + f \circ T(2) - f(2) + f \circ T(3) - f(3) \\ &= f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + f(0) - f(3) \\ &= 0\end{aligned}$$

- (b) Se tiene que si se prueba que existe Δ^{-1} la inversa de Δ , demostrando que efectivamente es la inversa, se concluye que Δ es biyectiva (y se tiene su inversa).

Se define la función $\Gamma : I \rightarrow D$ tal que $\Gamma(f)$ satisface que $\Gamma(f)(0) = -f(0) - f(1) - f(2) - f(3)$, $\Gamma(f)(1) = -f(1) - f(2) - f(3)$, $\Gamma(f)(2) = -f(2) - f(3)$, $\Gamma(f)(3) = -f(3)$. Es claro que para $f \in I$, $\Gamma(f)(0) = 0$, luego $\Gamma(f) \in D$. Se ve que $\Gamma \circ \Delta = id = \Delta \circ \Gamma$:

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(0) = \Gamma(\bar{f})(0) = -\bar{f}(0) - \bar{f}(1) - \bar{f}(2) - \bar{f}(3) = 0 = f(0)$$

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(1) = \Gamma(\bar{f})(1) = -\bar{f}(1) - \bar{f}(2) - \bar{f}(3) = f(1)$$

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(2) = \Gamma(\bar{f})(2) = -\bar{f}(2) - \bar{f}(3) = f(2)$$

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(3) = \Gamma(\bar{f})(3) = -\bar{f}(3) = f(3)$$

Con lo que $\Gamma \circ \Delta = id$. Análogamente se prueba que $\Delta \circ \Gamma = id$

P4.-

- (a) Si $h \in \mathcal{F}$, h es biyectiva y como $f \in \mathcal{F}$, f también es biyectiva, luego su composición es biyectiva y es función de E en E , luego $h \circ f \in \mathcal{F}$.
- (b) Considerando $g \in \mathcal{F}$, se ve que $g \circ f^{-1}$ pertenece a \mathcal{F} , pues g es biyectiva y f^{-1} existe y es biyectiva, por ser f biyectiva. Dado que $\varphi_f(g \circ f^{-1}) = g \circ f^{-1} \circ f = g$, se concluye que φ_f es sobreyectiva. Falta probar la inyectividad, para ello se consideran $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ tales que $\varphi_f(h_1) = \varphi_f(h_2)$, esto es equivalente a decir que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, como f es biyectiva, se puede aplicar $\circ f^{-1}$ a ambos lados de esta igualdad (pues f^{-1} existe) y se obtiene que $h_1 = h_2$

Nota: Un camino alternativo para probar la biyectividad de φ_f consiste en demostrar que tiene inversa. Para ello, en este caso, bastaría probar que $\varphi_{f^{-1}}$.

P5.-

Hay que mostrar que la inversa de la función $f \circ g$ es la función $g^{-1} \circ f^{-1}$. Para esto:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ id \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = id$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ id \circ g = g^{-1} \circ g = id$$

Con lo que se prueba que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

P6.-

Se tiene que $g^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ y que $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{4n} \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$.

P7.-

Se ha de ver que esto es cierto primero con la diferencia de conjuntos. Sean $A, B \subseteq X$, sea $y \in f(A) \setminus f(B)$, se tiene que entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y además $(\forall z \in B) f(z) \neq y$ con lo que $x \notin B$, es decir $x \in A \setminus B$, por lo tanto $y \in f(A \setminus B)$ con lo que se tiene que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

Para probar la igualdad en el caso f inyectiva, basta probar que se cumple en este caso $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$. Sea $y \in f(A \setminus B)$, se tiene entonces que existe $x \in A \setminus B$ tal que $f(x) = y$. Luego se sabe que $x \in A$ y, por tanto, $y \in f(A)$. Se ve que si $y \in f(B)$, entonces existiría $\bar{x} \in B$ tal que $f(\bar{x}) = y (= f(x))$, y por ser f inyectiva $\bar{x} = x$, lo que es una contradicción, pues se sabe que $x \notin B$, luego $y \notin f(B)$ y se concluye que $y \in f(A) \setminus f(B)$.

Para probar que se cumple para la diferencia simétrica, basta notar que

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

y usando que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ y las propiedades previamente probadas para \setminus , se concluye.

P8.-

Si $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$, entonces se observa que siempre $f(A) \subseteq f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$, luego basta probar que $f(A \cup B) \subseteq f(A)$, se tiene que dado $x \in f(A \cup B)$, como $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, entonces $x \in f(A) \vee x \in f(B)$, como $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$, se tiene que $f(B) \subseteq f(A)$, luego se tiene que necesariamente $x \in f(A)$. Se concluye que $f(A \cup B) = f(A)$.