MA1101-5 - Introducción al Álgebra. Semestre 2010-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Mónica Carvajal, Sebastián Reyes Riffo.

S6-P5. Se define $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Demuestre usando inducción que

$$H_{2^k} \leq 1 + k \quad k \in \mathbb{N}$$

Sol. Notemos que la inducción se realiza sobre la variable k.

- Veamos el caso base, $k = 1$:

$$H_{2^1} = H_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} < 2$$

- Supongamos ahora que la propiedad vale para k, y veamos que es cierta para $k+1$. Es decir, queremos probar: $H_{2^{k+1}} \leq k+2$. En efecto,

$$\begin{aligned} H_{2^{k+1}} &= \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \\ &\leq (k+1) + \underbrace{\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i}}_{S} \end{aligned}$$

S puede generar confusión, pero la forma astuta de abordar el problema es acotarlo por 1, para así obtener $H_{2^{k+1}} \leq k+2$ y concluir la demostración. Esta afirmación es cierta ya que:

- cada término de S se puede acotar por el mayor de todos, el cual es $\frac{1}{2^k+1}$.
- la cantidad de términos que suma S es: $2^{k+1} - (2^k + 1) + 1 = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$.

Después de esto, resulta:

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ términos}} \leq \frac{2^k}{2^k+1} < 1$$

Y esto concluye la demostración.

b) Demuestre usando inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \quad \forall n \geq 1$$

Sol. Inducción sobre n:
El caso base $n = 1$ es directo. Ahora supongamos cierta la propiedad para n, y demostremos su validez para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} H_i &= \left(\sum_{i=0}^{n} H_i\right) + H_{n+1} \\
&= ((n+1)H_n - n) + H_{n+1}
\end{aligned}$$

La expresión anterior tiene un único problema: el término H_n molesta. Para solucionarlo, de la definición de H_{n+1} tenemos

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{1+n}$$

Reemplazando esto obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} H_i &= ((n+1)(H_{n+1} - \frac{1}{1+n}) - n) + H_{n+1} \\
&= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+2)H_{n+1} - (n+1)
\end{aligned}$$

Y queda demostrado.