MA1101-5 - Introducción al Álgebra. Semestre 2010-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Mónica Carvajal, Sebastián Reyes Riffo.

S4-P7. Sea $f : X \to Y$ una función. Pruebe que $\forall A,\, B \subseteq X$

$$f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$$

Muestre además que si f es inyectiva, entonces

$$f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$$

Sol. Sean $A,\, B \subseteq X$. Primero, probemos que

$$f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} y \in f(A) \backslash f(B) &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \notin f(B)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \wedge (y \notin f(B)) \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que $x \notin B$, o de lo contrario $f(x) = y \in f(B)$. Esto muestra que $x \in A \backslash B$, y se tiene

$$y \in f(A) \backslash f(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(A \backslash B)$$

A continuación, se concluye

$$\begin{aligned} f(A) \triangle f(B) &= (f(A) \backslash f(B)) \cup (f(B) \backslash f(A)) \\ &\subseteq f(A \backslash B) \cup f(B \backslash A) \\ &= f(A \backslash B \cup B \backslash A) \\ &= f(A \triangle B) \end{aligned}$$

En el caso de f inyectiva, para mostrar la igualdad basta probar que

$$f(A)\backslash f(B) = f(A\backslash B)$$

La inclusión $\subseteq$ fue probada anteriormente. Veamos que $f(A)\backslash f(B) \supseteq f(A\backslash B)$:

$$y \in f(A\backslash B) \Leftrightarrow (\exists x \in A\backslash B)(y = f(x))$$

Es claro que $x \in A$, luego $f(x) = y \in f(A)$.
Veamos que $y \notin f(B)$: si $y \in f(B)$, existe $z \in B$ tal que $f(z) = y$. Como f es inyectiva, se tiene

$$f(x) = y = f(z) \Rightarrow x = z$$

esto es imposible, pues

$$x \in A\backslash B \quad \wedge \quad z \in B$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} y \in f(A\backslash B) &\Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \notin f(B)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f^c(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A)\backslash f(B) \end{aligned}$$

y esto termina la demostración.