MA1101-5 - Introducción al Álgebra. Semestre 2010-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Mónica Carvajal, Sebastián Reyes Riffo.

S4-P3. Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \to A$ la función definida por

$$T(0) = 1,\ T(1) = 2,\ T(2) = 3,\ T(3) = 0$$

e $I = \{h : A \to \mathbb{R} |\ h$ es función y $h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0\}$.
Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ definimos la función

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f} : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \widehat{f}(n) = f \circ T(n) - f(n) \end{array}$$

(a) (20 min.) Probar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$, entonces $\widehat{f} \in I$.

Sol. Sea f una función de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$.

- De la definición, $\widehat{f}$ es una función de A en $\mathbb{R}$.
- Veamos que $\widehat{f}(0) + \widehat{f}(1) + \widehat{f}(2) + \widehat{f}(3) = 0$. Su evaluación es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}(0) & = & f(1) - f(0) \\ \widehat{f}(1) & = & f(2) - f(1) \\ \widehat{f}(2) & = & f(3) - f(2) \\ \widehat{f}(3) & = & f(0) - f(3) \end{array}$$

Así, se tiene

$$\widehat{f}(0) + \widehat{f}(1) + \widehat{f}(2) + \widehat{f}(3) = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(0) - f(3) + f(1) - f(0) = 0$$

Lo que prueba que $\widehat{f} \in I$.

(b) (40 min.) Sea $D = \{f : A \to \mathbb{R} |$ h es función y $f(0) = 0\}$. Definimos la función

$$\begin{array}{rcl} \Delta : D & \longrightarrow & I \\ f & \longmapsto & \Delta(f) = \widehat{f} \end{array}$$

Probar que Δ es biyectiva y calcular Δ^{-1}.

Sol.

- Probemos inyectividad de Δ. Sean $f_1,\ f_2 \in D$, tales que

$$\begin{array}{rcl} \Delta(f_1) & = & \Delta(f_2) \\ f_1 \circ T(n) - f_1(n) & = & f_2 \circ T(n) - f_2(n) \qquad \forall n \in A \end{array}$$

De lo anterior, evaluando en cada $n \in A$ y usando que $f_1(0) = f_2(0) = 0$ (pues $f_1,\ f_2 \in D$) se obtiene

$$\begin{array}{rcl} f_1(1) & = & f_2(1) \\ f_1(2) & = & f_2(2) \\ f_1(3) & = & f_2(3) \end{array}$$

Y concluimos que ambas funciones son la misma.

- Estudiemos la sobreyectividad de Δ. Queremos probar

$$(\forall f \in I)(\exists g \in D)\ \Delta(g) = f$$

Sea $f \in I$. Buscamos $g \in D$, la cual <u>debe</u> cumplir que $g(0) = 0$. Para ello, proponemos:

$$g(0) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

A continuación, determinemos los valores de $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ tales que $\Delta(g) = f$

$$\begin{array}{rcl} \hat{g}(0) & = & f(0) \\ g(1) - g(0) & = & f(0) \\ g(1) & = & f(0) \end{array}$$

De manera similar, $g(2) = f(0)+f(1)$, y $g(3) = f(0)+f(1)+f(2)$. Con esto, hemos encontrado $g \in D$ tal que

$$\Delta(g) = f$$

- De paso, encontramos su inversa, dada por la asignación de g.