Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Problemas Semana 13

Pregunta 1

Recordemos que dado que las 5 raíces quintas de la unidad, están dadas por:

$$\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}}, \quad k = 0, \cdots, 4$$

Podemos escribir que $\omega_k = (\omega_1)^k$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4) =& (1-\omega_1)(1-\omega_1^2)(1-\omega_1^3)(1-\omega_1^4) \\
&= (1+\omega_1^3-\omega_1-\omega_1^2)(1+\omega_1^7-\omega_1^3-\omega_1^4) \\
&= 1+\omega_1^7-\omega_1^3-\omega_1^4+\omega_1^3+\omega_1^{10}-\omega_1^6-\omega_1^7 \\
&-\omega_1-\omega_1^8+\omega_1^4+\omega_1^5-\omega_1^2-\omega_1^9+\omega_1^5+\omega_1^6 \\
&= 1+\omega_1^{10}-\omega_1-\omega_1^8+2\omega_1^5-\omega_1^2-\omega_1^9
\end{aligned}$$

En este punto podemos ocupar el hecho que solo existen 5 raíces de la unidad distintas (las demás son iguales módulo 5, en este caso, a alguna de las que ya listamos), entonces, lo anterior es igual a:

$$= 1+1-\omega_1-\omega_1^3+2-\omega_1^2-\omega_1^4 = 4-(\omega_1+\omega_1^2+\omega_1^3+\omega_1^4)$$

Por último, lo que está dentro del paréntesis es igual a -1, debido a que la suma de las 5 raíces quintas de la unidad es cero.

Pregunta 2

Esta queda propuesta, pero sale de escribir que la suma de las n raíces n-ésimas de la unidad es cero. La igualdad de los cosenos sale de la componente real, mientras que la de los senos sale de la imaginaria.

Pregunta 3

S es grupo para la multiplicación habitual de complejos, no es difícil probar que es grupo abeliano (hacer). Para la parte (a), suponemos que z es raíz n-ésima de la unidad ($z^n = 1$). Como n divide a m, existe $l \in \mathbb{Z}$, que verifica $nl = m$. Entonces, se cumple que

$$z^m = z^{nl} = (z^n)^l = 1^l = 1$$

Por lo tanto, z es raíz m-ésima de 1. Para ver que U es subgrupo de S, usaremos la caracterización compacta:

$$U \neq \phi, \quad \forall z_1, z_2 \in U, z_1 z_2^{-1} \in U$$

1 siempre es raíz n-ésima, para cualquier n, por lo que U es no vacío. Para tener lo otro, sean $z_1, z_2 \in U$, lo que implica que existen $n_1, n_2 \geq 2$ tq $z_1^{n_1} = 1, z_2^{n_2} = 1$. Lo que necesitamos es encontrar algún m que cumpla que $(z_1 z_2^{-1})^m = 1$. No es difícil comprobar que el m que satisface esto es $m = n_1 n_2$:

$$\begin{aligned}(z_1 z_2^{-1})^{n_1 n_2} = (z_1)^{n_1 n_2}(z_2^{-1})^{n_1 n_2} &= (z_1^{n_1})^{n_2}((z_2^{-1})^{n_2})^{n_1} \\ &= 1^{n_2}(z_2^{-n_2})^{n_1} \\ &= 1((z_2^{n_2})^{-1})^{n_1} \\ &= ((1)^{-1})^{n_1} = 1\end{aligned}$$

Pregunta 4

Para la parte (a), corremos los índices de L(p):

$$L(p)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$$

Puesto que el polinomio está escrito en forma canónica (con la suma partiendo desde cero), es inmediato ver que su grado es n-1. Para la parte (b), primero observemos que, si bien las expresiones para p y q son las siguientes:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

en el caso que m y n sean distintos, podemos rellenar las sumatorias anteriores con ceros hasta que ambas sean sumas hasta n (así, podemos ocupar la fórmula de la multiplicación de polinomios). Notar que de esta forma, no estamos cambiando el grado de los polinomios p y q, los grados siguen siendo los mismos (solo estamos cambiando virtualmente la sumatoria). Por la parte (a), tenemos lo siguiente:

$$L(p)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k \qquad L(q)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)b_{k+1}x^k$$

Usando el mismo argumento anterior, podemos considerar que estas 2 sumatorias llegan hasta n. Escribamos entonces:

$$L(p)q + pL(q) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k}(i+1)a_{i+1}b_{k-i}\right)x^k + \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i(k-i+1)b_{k-i+1}\right)x^k$$

Ahora, en el término k-ésimo de la sumatoria de la izquierda -que es también una sumatoria-, corremos los índices, y lo anterior nos queda entonces así:

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k-(i-1)}\right)x^k + \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i(k-i+1)b_{k-i+1}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{k} i a_i b_{k-i+1} + (k+1)a_{k+1}b_0\right)x^k + \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i(k-i+1)b_{k-i+1} + a_0(k+1)b_{k+1}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\left((k+1)a_{k+1}b_0 + a_0(k+1)b_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}[i+k-i+1]a_i b_{k-i+1}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n}(k+1)\left(\sum_{i=0}^{k+1}a_i b_{k-i+1}\right)x^k\end{aligned}$$

La última expresión coincide con $L(pq)$, excepto porque el grado de $L(pq)$ es $2n-1$. Sin embargo, se tiene la igualdad, puesto que el último término de la sumatoria anterior (cuando k=2n) es nulo. Para ver esto, veamos que el coeficiente k-ésimo cuando k=2n está dado por:

$$(2n+1)\left(\sum_{i=0}^{2n+1} a_i b_{2n-i+1}\right)$$

Se tiene que cuando $i \leq n$, b_{2n-i+1} se anula. Por último, cuando $i > n$, a_i se anula.

(c) El caso base es n=1, en esta situación:

$$p(x) = x - d \Rightarrow L(p)(x) = \sum_{k=0}^{0}(k+1)a_{k+1}x^k = 1 = 1(x-d)^{1-1}$$

En el caso general, suponemos que la propiedad es cierta hasta n (HI). Para el caso (n+1) utilizamos la prop. probada en (b):

$$\begin{aligned} L((x-d)^{n+1}) = L((x-d)^n(x-d)) &= L((x-d)^n)(x-d) + (x-d)^n L(x-d) \\ &= n(x-d)^{n-1}(x-d) + (x-d)^n = (n+1)(x-d)^n \end{aligned}$$

En la tercera igualdad usamos (HI), y el caso base (la prop. es cierta cuando n=1).

Pregunta 5

A mi juicio este problema no está correcto, por lo siguiente:

$(J_2, \triangle)$ no es grupo porque no están definidos los inversos para todo elemento. Para ver esto, veamos primero quién es el neutro. El neutro es un polinomio $e(x) \in J_2$ que verifica

$$e \triangle p = p \triangle e = p \Leftrightarrow p(e(x)) = e(p(x)) = p(x)$$

Vemos que el polinomio que cumple esto es el polinomio identidad $e(x) = id(x) = x$. Ahora, dado un polinomio p $\in J_2$, su inverso q será el polinomio que cumpla : $p(q(x)) = x$ Si suponen que p es de la forma $p = a_1x + a_2x^2$ (por estar en J_2), pueden obtener una ecuación cuadrática para q (hacer). Si despejan q, obtienen algo que no es un polinomio, por lo que el inverso no vive en J_2. Si alguien piensa que el problema está bueno, pueden postearlo en el foro =P