Control 1 - Algebra
Pauta Problema 2

a) Sea A un subconjunto fijo del conjunto universo U. Probar que $\forall X, Y \subseteq U$ se tiene que

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

1ra Forma: Por elementos.

Sea $x \in X \Rightarrow x \in X \cup A \overset{\text{hipot}}{\Longleftrightarrow} x \in Y \cup A \Rightarrow x \in Y \vee x \in A$

i) Si $x \in Y$, entonces $x \in \cancel{X} \Rightarrow x \in Y \rightarrow X \subseteq Y \longrightarrow$ (1.0)

ii) Si $x \in A \Rightarrow x \in X \cap A \overset{\text{hip}}{\Longleftrightarrow} x \in Y \cap A \Rightarrow x \in Y$

así, también, $X \subseteq Y$

Analogamente se deduce $Y \subseteq X$ de donde $X = Y \longrightarrow$ (2.0)

2a Forma

De la primera igualdad $X \cup A = Y \cup A \quad / \cap X$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(X \cup A) \cap \cancel{X}} = (Y \cup A) \cap X$$

(1.0) $\longrightarrow$ $\Rightarrow \quad X = (X \cap Y) \cup (X \cap A)$ Distributividad

$\Rightarrow \quad X = (X \cap Y) \cup (Y \cap A)$ pues $X \cap A = Y \cap A$

Distributividad.

$\Rightarrow \quad X = (X \cup A) \cap Y$ pues $X \cup A = Y \cup A$

$\Rightarrow \quad X = \underbrace{(Y \cup A) \cap Y}$

(2.0) $\longrightarrow$ $\Rightarrow \quad X = Y$

b) Sea $A \subseteq U$, $A \neq \phi$. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(U)$ por

$$X \in \mathcal{F}_A \iff X \subseteq U \wedge X \cap A \neq \phi$$

Demuestre que dado $B \subseteq U$.

1. $U \in \mathcal{F}_A$ y $A \in \mathcal{F}_A$
2. Si $A \setminus B \neq \phi \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$
3. Si $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq U \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$

En efecto

1. $U \cap A = A$ y por hipótesis $A \neq \phi$. Así $U \cap A \neq \phi$ sigue que $U \in \mathcal{F}_A$

   Analogamente $A \cap A = A \neq \phi \Rightarrow A \in \mathcal{F}_A$. $\longrightarrow$ 0.8

2. $A \setminus B \neq \phi \iff A \cap B^c \neq \phi \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$. $\longrightarrow$ 0.7

3. Se debe probar que $(B \cup C) \cap A \neq \phi$

   En efecto, $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

   y por hipótesis $B \in \mathcal{F}_A$, es decir $B \cap A \neq \phi$

   Sigue que $(B \cap A) \cup (C \cap A) \neq \phi$ independiente de $C \cap A$.

   Entonces $(B \cup C) \in \mathcal{F}_A$ $\longrightarrow$ 1.5