P1. Primero notemos que si $w_1,\ w_2$ son $n-$raíces de la unidad, entonces $w_1 \cdot w_2$ también lo es: $(w_1 \cdot w_2)^n = w_1^n \cdot w_2^n = 1$. Con esto en mente, consideramos:

$$\begin{array}{rclcrcl} w_0 & = & 1 & \quad & w_3 & = & e^{i\frac{3\cdot 2\pi}{5}} \\ w_1 & = & e^{i\frac{2\pi}{5}} & & w_4 & = & e^{i\frac{4\cdot 2\pi}{5}} \\ w_2 & = & e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} & & & & \end{array}$$

Comenzamos a desarrollar el lado izquierdo:

$$(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)(1-w_4) = (1-w_2-w_1+w_1w_2)(1-w_4-w_3+w_3w_4)$$

De la definición de los w tenemos que:

$$\begin{array}{rclclcl} w_1w_2 & = & e^{i\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} & = & e^{i\frac{3\cdot 2\pi}{5}} & = & w_3 \\ w_3w_4 & = & e^{i\frac{3\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{4\cdot 2\pi}{5}} & = & e^{i\frac{7\cdot 2\pi}{5}} & = & e^{i\frac{5\cdot 2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{5}} = w_2 \end{array}$$

Entonces queda:

$$\begin{aligned} (1-w_2-w_1+w_1w_2)(1-w_4-w_3+w_3w_4) &= (1-w_2-w_1+w_3)(1-w_4-w_3+w_2) \\ &= 1-w_4-w_3+w_2-w_2+w_2w_4+w_2w_3-w_2w_2 \\ &\quad -w_1+w_1w_4+w_1w_3-w_1w_2+w_3-w_3w_4-w_3w_3+w_3w_2 \end{aligned}$$

Calculamos los productos que nos faltan, notemos que en general se tiene:

$$w_lw_m = e^{i\frac{l\cdot 2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{m\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{(l+m)\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{(l\ +_5\ m)\cdot 2\pi}{5}} = w_{(l+_5 m)}$$

Donde $+_5$ es la suma modulo 5, esto es porque nos interesa sólo el resto de la division $(l+m:5)$, ya que si $l+m = 5k+r$ podemos tomar $e^{i\frac{(l+m)\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{(5k+r)\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{5k\cdot 2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{r\cdot 2\pi}{5}} = 1^k \cdot e^{i\frac{r\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{r\cdot 2\pi}{5}}$. Retomando (y simplificando):

$$\begin{aligned} (1-w_2-w_1+w_1w_2)(1-w_4-w_3+w_3w_4) &= (1-w_2-w_1+w_3)(1-w_4-w_3+w_2) \\ &= 1-w_4-w_3+w_2-w_2+w_2w_4+w_2w_3-w_2w_2 \\ &\quad -w_1+w_1w_4+w_1w_3-w_1w_2+w_3-w_3w_4-w_3w_3+w_3w_2 \\ &= 1-w_4-w_3+w_1+1-w_4 \\ &\quad -w_1+1+w_4-w_3+w_3-w_2-w_1+1 \\ &= 4-w_3-w_4-w_2-w_1 = 5 \end{aligned}$$

$-w_3-w_4-w_2-w_1 = 1$ pues sabemos que la suma de las 5 5-raices de la unidad es igual 0.

P2. Queremos demostrar que para $n \geq 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} cos(\frac{2l\pi}{n}) &= -1 \\ \sum_{l=1}^{n-1} sen(\frac{2l\pi}{n}) &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que la primera igualdad equivale a $\sum\limits_{l=0}^{n-1} cos(\frac{2l\pi}{n}) = 0$ y la segunda a $\sum\limits_{l=0}^{n-1} sen(\frac{2l\pi}{n}) = 0$ $(cos(0)=1,\ sen(0)=0)$. Así las segunda ecuacion también equivale a $i\sum\limits_{l=0}^{n-1} sen(\frac{2l\pi}{n}) = 0$

Y sumando ambas ecuaciones nos queda:

$$\sum_{l=0}^{n-1} cos(\frac{2l\pi}{n}) + i\sum_{l=0}^{n-1} sen(\frac{2l\pi}{n}) = \sum_{l=0}^{n-1}\left(cos(\frac{2l\pi}{n}) + isen(\frac{2l\pi}{n}\right) = 0$$

Ahora partimos de algo conocido: las $n-$raices de la unidad suman 0, ie:

$$\sum_{l=0}^{n-1} e^{i\frac{2l\pi}{n}} = \sum_{l=0}^{n-1}\left(cos(\frac{2l\pi}{n}) + isen(\frac{2l\pi}{n})\right) = 0$$

Igualando parte real y parte imaginaria tenemos lo buscado