P1

a)Completar(suponiendo que $(\mathcal{A},\oplus,\circledast)$es anillo

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b		d
b		a		
c			a	
d				

$\circledast$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a			a
c	a		c	
d	a	b	c	

Completamos primero la tabla para la suma, notando que es un grupo abeliano y también notando que no pueden repetirse elementos ni en filas ni en columnas, ya que en tal caso existirían 2 inversos para un mismo número (imposible dada la asociatividad del grupo)

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Resulta ser la única completación posible dadas estas restricciones. Acá vemos que el neutro aditivo es +. Este a resulta ser el elemento absorbente para la multiplicación ya que $b \circledast 0 = b \circledast (0+0) = b \circledast 0 + b \circledast 0 \Rightarrow b \circledast 0 = 0$, $\forall b \in \mathcal{A}$(Se hizo uso de la distributividad del producto y de la cancelabilidad de los elementos con respecto a la operación suma).

Calculemos $b \circledast c = (c+d) \circledast c = c \circledast c + d \circledast c = c + c = a$

$$b \circledast b = b \circledast (c+d) = b \circledast c + b \circledast d = a + a = a$$

$$c \circledast b = (b+d) \circledast b = b \circledast b + d \circledast b = a + b = b$$

$$d \circledast d = (b+c) \circledast (b+c) = b \circledast b + c \circledast b + b \circledast c + c \circledast c = a + b + a + c = d$$

$$c \circledast d = c \circledast (c+b) = c \circledast c + c \circledast b = c + b = d$$

La estrategia era expresar las operaciones desconocidas en términos de conocidas. Tenemos entonces.

$\circledast$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

De acá se desprende que b,c,d son todos divisores del 0.No es conmutatvo pues $c \circledast b \neq b \circledast c$

No tiene unidad porque para que hubiera se tendrían que tener una fila i-ésima (a,b,c,d) y una columna i-ésima (a,b,c,d) acá sól encontramos una fila (la tercera)

b)SI $(A,+,\cdot)$ es un anillo tal que $x \cdot x = x \cdot \forall x \in A$ demuestre que

b1) $x = -x \forall x \in A$

Sol: $x = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = (-x) \cdot ((-x) \cdot (-x)) \ = -(x) \cdot (x \cdot x) = -x \cdot x = -x$

b2) $(A,+,\cdot)$ es anillo conmutativo

Sol:
$(a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a + a \cdot b + b \cdot a + b = (a+b) + (a \cdot b + b \cdot a)$

Pero $(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)$

Luego $(a+b) = (a+b) + (a \cdot b + b \cdot a) \Rightarrow a \cdot b + b \cdot a = 0 \Rightarrow a \cdot b = -b \cdot a = b \cdot a$
esto último por la propiedad antes demostrada

P2Considere en $\mathbb{R}^2$ la operaciones $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ y $(a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$

a)Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad

Demostremos primero que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es grupo abeliano i)

$(a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f)) \;=(a,b) \oplus (c+e,d+f) = (a+(c+e),b+(d+f)) \;= ((a+c)+e,(b+d)+f) =$

Luego es asociativa

Es fácil ver que el neutro es $(0,0)$y el inverso de(a,b) es $(-a,-b)$

Además $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,b+d) = (c+a,d+b) = (c,d) \oplus (a,b)$lo que muestra la conmutatividad(acá se usó el hecho de que $(\mathbb{R},+)$es grupo abeliano

Ahora falta ver que$(\mathbb{R},\cdot)$ es una estructura algebraica conmutativa dotada de neutro

En efecto $(a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c,b \cdot d) = (c \cdot a,d \cdot b) = (c,d) \odot (a,b)$Además es obvio que $(1,1)$es el neutro multiplicativo.

Por último veamos la distributividad.

$(a,b) \odot ((c,d) \oplus (e,f)) \;= (a,b) \odot (c+e,d+f) = (a \cdot (c+e),b \cdot (d+f)) \;= (a \cdot c + a \cdot e,b \cdot d + b \cdot f) =$

La otra distributividad se prueba de manera análoga (en todas las demostraciones se usaron propiedades de que $\mathbb{R}$es cuerpo

b)Demuestre que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$posee divisores del cero. Basta considerar $(1,0) \odot (0,1) = (0,0)$Siendo ambos no nulos.

c)Demuestre que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$no es isomorfo a $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Supongamos existiera tal isomorfismo.Como las 2 estructuras son anillos, el isomorfismo al que se refieren debe ser de anillos, ie una función biyectiva

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$con las siguientes propiedades

i)$f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$

ii)$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y)$

Sean $x = (1,0)\, y = (0,1)$es decir, los divisores del cero encontrados. Como f es un morfismo de grupos sobreyectivo se tiene que $f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{C}}$

En efecto, Como f es sobreyectiva para cualquier $x \in \mathbb{C}$ se tiene $x = f(y)$ para algún $y \in \mathbb{R}^2$

En particular $f(y) = 0_{\mathbb{C}}$ Para cierto y.

Tenemos $f(0_{\mathbb{R}^2}) + x = f(0_{\mathbb{R}^2}) + f(y) = f(0_{\mathbb{R}^2} \oplus y) = f(y) = x$ Procediendo análogamente para el otro lado, se concluye que $f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{C}}$

Entonces usando x, y recién definidos tenemos
$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y) = f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{C}}$

Pero $f(x), f(y) \neq 0_{\mathbb{C}}$ Ya que si alguno de ellos lo fuera, la función no sería inyectiva.Tenemos entonces que $f(x), f(y)$ son divisores del 0 en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ lo cual es ridículo porque un cuerpo no tiene divisores del 0 (y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es cuerpo). Se concluye que no existe tal isomorfismo, por lo tanto las 2 estructuras no son isomorfas.

P3) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = |z+1| = 1$. Demuestre que z es una raíz cúbica de la unidad

Solución "trabajosa" Sea $z = a + bi$

Por los datos del problema

$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow (a+bi)\overline{(a+bi)} = 1 \Leftrightarrow (a+bi)(a-bi) = 1 \Leftrightarrow (a^2+b^2) = 1$$

$$|z+1|^2 = (a+1+bi)\overline{(a+1+bi)} = (a+1+bi)(a+1-bi) = (a+1)^2 + b^2 = 1$$

Esto implica que

$$(a^2+b^2) = (a+1)^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a+1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}$$

Como $(a^2+b^2) = 1 \Rightarrow b = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

Luego

$$z^3 = (a+bi)^3 = (a^2+2abi-b^2)(a+bi) = a^3 + 2a^2bi - ab^2 + a^2bi - 2ab^2 - b^3i = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 -$$

(Si tomamos la raíz negativa da lo mismo, comprobarlo) b)Sean z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ Demostrar que

$$|1 - z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|)^2$$

Solución

$$|1 - z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - z_2\overline{z_1})\overline{1 - z_2\overline{z_1}} - (z_1 - z_2)\overline{z_1 - z_2} = (1 - z_2\overline{z_1})(1 - \overline{\overline{z_2}}z_1) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$$

$$= 1 + z_2\overline{z_1}\overline{z_2}z_1 - z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} = (1 - z_1\overline{z_1})(1 - z_2\overline{z_2}) = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

Nota: se usó el hecho de que $\overline{\overline{z}} = z$

c)Deduzca usando lo anterior que si $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ se tiene

$$\frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 - z_2\overline{z_1}|^2} < 1$$

Notemos que si se cumple la hipótesis

$$(1 - |z_1|^2) \geq 0$$

$$(1 - |z_2|^2) \geq 0$$

Lo que implica

$$|1 - z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1 - z_2|^2 \geq 0$$

Pero $|1 - z_2\overline{z_1}| = 0 \Leftrightarrow z_2\overline{z_1} = 1 \Rightarrow |z_2||z_1| = 1$ Para que esto ocurra necesariamente alguno de los dos números complejos debe tener norma mayor o igual a 1, lo que contradice la hipótesis.(Nota: $|z| = |\overline{z}|$) Por lo tanto $|1 - z_2\overline{z_1}| > 0$ así que no hay problemas para dividir en la inecuación.Dividiendo por $|1 - z_2\overline{z_1}|$ tenemos

$$1 - \frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 - z_2\overline{z_1}|^2} > 0$$ Esto implica.

$$\frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 - z_2\overline{z_1}|^2} < 1$$

P4 Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$ Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\bar{z}^n} \in \mathbb{R}$$

Demostración

Es claro que si un número es igual a su conjugado, entonces el número es real(ya que esto sucede sólo si la parte imaginaria es 0). Entonces demostraremos que el conjugado de $\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\bar{z}^n}$ es él mismo

Para eso hay que saber algunas propiedades de la conjugación

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

De acá se deduce por inducción que

$$\bar{z}^n = \overline{z^n}$$

Además se tiene $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

Entonces:

$$\overline{\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\bar{z}^n}} = \overline{\frac{1}{1+z^n}} + \overline{\frac{1}{1+\bar{z}^n}} = \frac{\bar{1}}{\overline{1+z^n}} + \frac{\bar{1}}{\overline{1+\bar{z}^n}} = \frac{1}{1+\overline{z^n}} + \frac{1}{1+\overline{\bar{z}^n}} = \frac{1}{1+\bar{z}^n} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z^n}}} = \frac{1}{1+\bar{z}^n}$$

Como vimos el conjugado es el mismo número, por lo tanto es un número real.